TEORIA DOS CONJUNTOS

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA RIO GRANDE DO NORTE

Professor: Marcelo Silva

marcelo.silva@ifrn.edu.br

Natal - RN, agosto de 2013.

INTRODUÇÃO

Um funcionário do departamento de seleção de pessoal de uma indústria automobilística, analisando o currículo de 47 candidatos, concluiu que apenas 3 deles nunca trabalharam em montagem ou pintura, 32 já trabalharam em montagem, e 17 já trabalharam nos dois setores.

a) De acordo com essas informações, quantos desses candidatos já trabalharam apenas em pintura de automóveis?

b) Quantos candidatos não têm experiência em pintura de automóveis?

c) Quantos candidatos não têm experiência em nenhum dos dois setores?

CONCEITO – NOÇÃO INTUITIVA

- Várias coisas reunidas por meio de uma característica comum.

Ex.1: Os alunos desta sala.

Ex.2: Os meses do ano.

- A relação entre os objetos e o conjunto do qual eles fazem parte é chamada Relação de Pertinência.

Notação: $\in$ ou $\notin$

- Os objetos são chamados elementos e indicados por letras minúsculas.

FORMAS DE REPRESENTAÇÃO

É possível representar um conjunto por:

1) Enumeração

Ex: conjunto dos dias da semana.

A = {seg, ter, qua, qui, sex, sab, dom}

Ex: conjunto dos números ímpares positivos.

B = {1, 3, 5, 7, 9, 11, ...}

2) Propriedade comum aos seus elementos

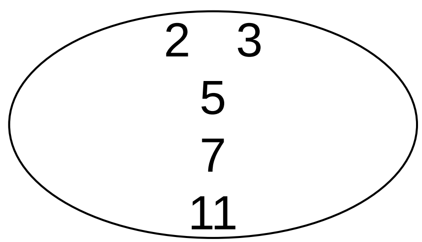
Ex: conjunto dos naturais menores que 8.

$$A = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ e } x < 8\}$$

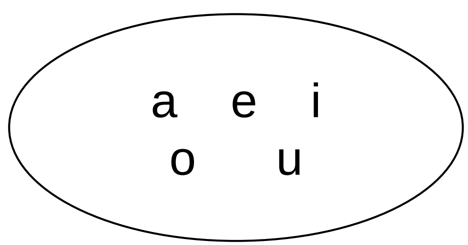
FORMAS DE REPRESENTAÇÃO

3) Diagrama

Ex.1**:** A = {2, 3, 5, 7, 11}



Ex.2: C = {x| x é vogal}



CONJUNTOS: VAZIO, UNIVERSO E UNITÁRIO

- Conjunto vazio é aquele que não possui elementos.

Notação: { } ou $\varnothing$

- Conjunto universo é o conjunto ao qual pertencem os elementos de todos os conjuntos em estudo.

Notação: U

- Conjunto unitário é aquele que só possui um elemento.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA RIO GRANDE DO NORTE

SUBCONJUNTOS – RELAÇÃO DE INCLUSÃO

Dados dois conjuntos A e B dizemos que A é subconjunto de B se cada elemento de A é, também, um elemento de B.

Notação:

$A \subset B$ significa que A está contido em B.

$A \not\subset B$ significa que A não está contido em B.

Ex.1: A = {2, 3, 4} e B = {4, 3, 2, 1, 5, 6}.

Ex.2: A = {x| x é natural par e menor que 10} e B = {x| x é natural, múltiplo de 2 e é menor que 8}.

IGUALDADE DE CONJUNTOS

Definição: Dois conjuntos são iguais quando possuem os mesmo elementos.

Ex.1: A = {1, 2, 3, 4} e B = {4, 3, 2, 1}.

Ex.2: A = {x| x é natural par e menor que 10} e B = {x| x é natural, múltiplo de 2 e é menor que 10}.

Ex.3: A = {1, 3, 5} e B = {0, 1, 4, 8}.

01.

Dado o conjunto $A = \{\{1\}, 3, \{1, 2\}\}$, classificar em verdadeira ou falsa cada uma das afirmações abaixo:

a) $n(a) = 4$ ( )

b) $\varnothing \in A$ ( )

c) $\varnothing \subset A$ ( )

d) $1 \in A$ ( )

e) $1 \subset A$ ( )

f) $\{1\} \in A$ ( )

g) $\{1\} \subset A$ ( )

h) $2 \in A$ ( )

CONJUNTO DAS PARTES

Dado um conjunto A, qualquer, denominamos *conjunto das partes de A*, denotado por P(A), o conjunto formado por todos os subconjuntos de A. Em símbolos, $P(A)=\{X \mid X \subset A\}$

Ex: Dado A={1, 4, 9}, determinar P(A).

QUESTÕES

1) Sendo A = {2, 7, {-1}}, determine P(A).

2) Quantos elementos possui o conjunto A, sabendo que ele possui 128 subconjuntos?

Se um conjunto A possui n elementos, então o conjunto P(A), das partes de A, possui 2^n elementos. Qual é o número de elementos do conjunto das partes de P(A)?

a) 2^n

b) 4^n

c) 2^{2^n}

d) 8^n

e) 16^n

Considere um conjunto A com *n* subconjuntos. Acrescentamos a este conjunto quatro elementos distintos entre si e aos já existentes. O número de elementos que passará a ter o novo conjunto de partes do conjunto A será:

a) $n + 4$

b) $n + 16$

c) n^4

d) $4n$

e) $16n$

OPERAÇÕES COM CONJUNTOS

União: dados dois conjuntos A e B, chama-se de união de A com B, ao conjunto

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

Interseção: dados dois conjuntos A e B, chama-se de interseção de A com B, ao conjunto

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$

Diferença: dados A e B, chama-se diferença entre A e B, ao conjunto

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$

OPERAÇÕES COM CONJUNTOS

Obs 1:

Se $B \subset A$, a diferença A-B também é chamada de complementar de B com relação a A e é denotada por C_A^B

Obs 2:

$$C_U^A = \overline{A}$$

01. UFAL

Se A e B são dois conjuntos não-vazios, tais que: .

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

$A - B = \{1, 3, 6, 7\}$

$B - A = \{4, 8\}$

então $A \cap B$ é o conjunto:

a) $\varnothing$

b) $\{1, 4\}$

c) $\{2, 5\}$

d) $\{6, 7, 8\}$

e) $\{1, 3, 4, 6, 7, 8\}$

03. Consultec-BA

São dados os conjuntos:

$A = \{x \in N / x \text{ é par}\}$,

$B = \{x \in Z / -1 \leq x < 6\}$ e

$C = \{x \in N / x \leq 4\}$.

O conjunto x, tal que $x \subset B$ e $B - x = A \cap C$, é:

a) {0, 3 , 5}
b) {1, 3, 5}
c) {0, 1, 3, 5}
d) {–1, 1, 3, 5}
e) {–1, 1, 3, 5, 6}

PRINCÍPIO DA INCLUSÃO E EXCLUSÃO

Dados dois conjuntos A e B, temos:

- Se A e B são disjuntos, isto é, $A \cap B = \emptyset$ o número de elementos da união é dado por

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

- Caso contrário, temos que:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

QUESTÃO

Se A, B e $A \cap B$ são conjuntos com 90, 50 e 30 elementos, respectivamente, então o número de elementos do conjunto $A \cup B$ é:

a) 10
b) 70
c) 85
d) 110
e) 170

QUESTÃO

Numa pesquisa sobre a preferência em relação a dois jornais, foram consultadas 470 pessoas e o resultado foi: 250 delas lêem o jornal A, 180 lêem o jornal B e 60 lêem os jornais A e B.

Pergunta-se:

a) Quantas pessoas lêem apenas A?

b) Quantas pessoas lêem apenas B?

c) Quantas lêem jornais?

d) E quantas não lêem jornais?

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
RIO GRANDE DO NORTE

QUESTÃO

Uma editora estuda a possibilidade de lançar novamente as publicações: *Helena, Senhora* e *A Moreninha*. Para isto, efetuou uma pesquisa de mercado e concluiu que em cada 1000 pessoas consultadas:

600 leram *A Moreninha;*

400 leram *Helena;*

300 leram *Senhora;*

200 leram *A Moreninha* e *Helena;*

QUESTÃO

150 leram *A Moreninha* e *Senhora;*

100 leram *Senhora* e *Helena;*

20 leram as três obras.

Calcule:

a) O número de pessoas que leu apenas uma das obras.

b) O número de pessoas que não leu nenhuma das obras.

c) O número de pessoas que leu duas ou mais obras.

02. UEPA

Após o lançamento de produtos derivados do açaí, um instituto de beleza promoveu entre suas clientes uma pesquisa e constatou que: 48 clientes usaram *shampoo* à base de açaí; 35 usaram o condicionador; 15 usaram os dois produtos e apenas 12 dessas clientes entrevistadas não utilizaram nenhum desses dois produtos. Pede-se:

a) o diagrama representativo dessa pesquisa;

b) o número de clientes entrevistadas.

03. Mackenzie-SP

Numa pesquisa de mercado, verificou-se que 15 pessoas utilizam os produtos A ou B, sendo que algumas delas utilizam A e B. O produto A é usado por 12 dessas pessoas e o produto B, por 10 delas. O número de pessoas que utilizam ambos os produtos é:

a) 5

b) 3

c) 6

d) 8

e) 7

1. OS NÚMEROS NATURAIS - $\mathbb{N}$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

- Surgiram da necessidade de contar, de registrar quantidades, com o intuito de ter um controle maior sobre os bens.
- O conjunto dos números naturais é infinito e ordenado.
- $\mathbb{N}^*$ corresponde ao $\mathbb{N}$ sem o zero.

2. OS NÚMEROS INTEIROS - $\mathbb{Z}$

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

- Surgiram da necessidade de encontrar solução para problemas como a subtração $2-3$.
- Também pela necessidade de se representar temperaturas mínimas, saldo bancário, etc.
- Os principais subconjuntos de $\mathbb{Z}$ são:

2.1 PRINCIPAIS SUBCONJUNTOS DE $\mathbb{Z}$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA RIO GRANDE DO NORTE

$$\mathbb{Z}^* = \{\dots, -3, -2, -1, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$\mathbb{Z}_- = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0\}$$

$$\mathbb{Z}_+^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$\mathbb{Z}_-^* = \{\dots, -4, -3, -2, -1\}$$

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA RIO GRANDE DO NORTE

3. OS NÚMEROS RACIONAIS - $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \{\ldots, -3, \frac{-5}{2}, -2, \frac{-3}{2}, -1, 0, \frac{1}{4}, 1, \frac{3}{2}, 2, 3, \ldots\}$$

- Surgiram da necessidade de quantificar e representar medidas.
- O conjunto dos racionais contém os números naturais, inteiros e os números representados por frações ou decimais finitos e/ou periódicos.
- Os principais subconjuntos de $\mathbb{Q}$ são:

3.1 PRINCIPAIS SUBCONJUNTOS DE $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q}^* = \{\ldots, -3, \frac{-5}{2}, -2, -1, 1, 2, 3, \frac{7}{2}, \ldots\}$$

$$\mathbb{Q}_+ = \{0, 1, 2, 3, \frac{7}{2}, 4, \ldots\}$$

$$\mathbb{Q}_- = \{\ldots, -4, -3, -2, \frac{-3}{2}, -1, 0\}$$

$$\mathbb{Q}_+^* = \{\frac{1}{2}, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

$$\mathbb{Q}_-^* = \{\ldots, -4, -3, -2, \frac{-3}{2}, -1\}$$

4. OS NÚMEROS IRRACIONAIS - $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

- Devido a problemas como a medição de segmentos cuja medição não era um número racional ou divisões entre dois números cujo resultado não era decimal finito nem periódico, surgiram os números irracionais..
- Ex: $-\sqrt{5}, -\sqrt{3}, \ldots, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, \ldots$

5. OS NÚMEROS REAIS - $\mathbb{R}$

$$\mathbb{R} = \{\ldots, -3, \frac{-5}{2}, -2, -\sqrt{3}, \frac{-3}{2}, -1, 0, \frac{1}{4}, 1, \sqrt{2}, \frac{3}{2}, 2, 3, \ldots\}$$

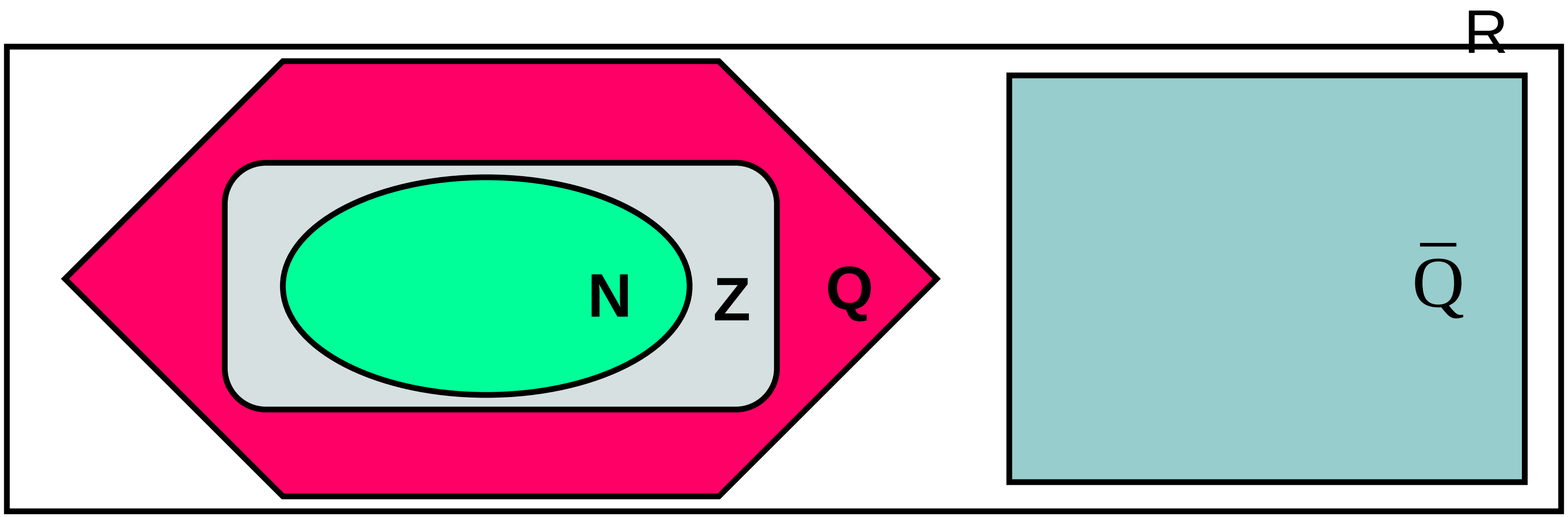
- Corresponde a união de todos os outros conjuntos numéricos.
- Existe uma correspondência biunívoca entre os pontos de uma reta e os números reais. Tal reta será chamada **reta real**.

RESUMO

1) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

2) $\mathbb{Q} \cup \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$

3) $\mathbb{Q} \cap \overline{\mathbb{Q}} = \varnothing$



Exercícios de Aplicação

01.

Coloque V ou F:

a) (   ) Todo número inteiro é um racional.

b) (   ) A subtração de dois números naturais é sempre um natural.

c) (   ) A soma de um número racional com um número irracional é sempre um número irracional.

d) (   ) O produto de dois números irracionais pode dar um número racional.

e) (   ) A soma de dois númeos irracionais pode dar um número racional.

f) (   ) A divisão de um número racional por um natural sempre dá um número racional.

g) (   ) O produto de um racional por um irracional pode resultar num número inteiro.

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA RIO GRANDE DO NORTE

02.

Coloque V ou F:

a) ( ) $\forall a \in Q \rightarrow a \in R$

b) ( ) $\forall a \in R \rightarrow a \in Z$

c) ( ) $\forall a \in Z \rightarrow a \in N$

d) ( ) $\forall a \in N \rightarrow a \in R$

e) ( ) $\exists x \in \overline{Q} \,/\, x \in R$

f) ( ) $\exists x \in Q \,/\, x \in N$

g) ( ) $N \subset R^*$

h) ( ) $R^* \supset Z^*$

RELAÇÃO DE ORDEM - $\mathbb{R}$

Sejam dois números reais quaisquer a e b. Entre a e b poderá ocorrer uma, e somente uma, das relações: a=b ou a>b ou a<b.

a<b significa que a é menor que b e que está à esquerda de b na reta real.

a>b significa que a é maior que b e que está à direita de b na reta real.

Também existem $a \leq b$ e $a \geq b$.

INTERVALO REAL

1) { x Є N / 2 < x < 8 } = { 3, 4, 5, 6, 7 }

2) { x Є Z / -4 < x < 3 } = { -3, -2,-1,0, 1, 2 }

3) { x Є R / -2 < x < 2 } **= ?**

OS PRINCIPAIS INTERVALOS SÃO:

$$1^{o}\ )\ \text{FECHADO}\,[a;b] = \{\, x \in R \ /\ a \leq x \leq b \,\}$$

$$2^{o}\ )\ \text{ABERTO}\ ]a;b[\ = (a;b) = \{\, x \in R \ /\ a < x < b \,\}$$

3°) ABERTO À DIREITA

$$[a;b[= [a;b) = \{ x \in R \,/\, a \leq x < b \}$$

4º) ABERTO À ESQUERDA

$$]a;b] = (a;b] = \{ x \in R \,/\, a < x \leq b \}$$

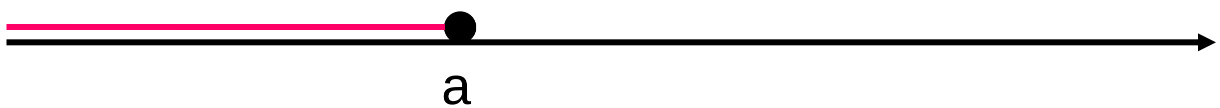
5º) INTERVALOS IRRESTRITOS

(têm apenas um limite e trabalhamos com $\pm \infty$)

$$a)\ [a;+\infty[\ = [a;+\infty) = \{\, x \in R \ / \ x \geq a \,\}$$

$$a)\ ]a;+\infty[\ = (a;+\infty) = \{\, x \in R \ / \ x > a \,\}$$

c) $]-\infty; a] = (-\infty; a] = \{ x \in R \,/\, x \leq a \}$



d) $]-\infty; +\infty[= (-\infty; a) = \{ x \in R \}$