



**UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL  
UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA**

**Especialização em Educação a Distância**

# **FISICA I**

**Salvador  
2009**

**ELABORAÇÃO**

Melquisedec Lourenço da Silva

**DIAGRAMAÇÃO**

Nilton Rezende

QUÍMICA

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP).  
Catalogação na Fonte  
BIBLIOTECA DO NÚCLEO DE EDUCAÇÃO À DISTÂNCIA – UNEB**

SILVA, Melquisedec Lourenço da.  
S586 Física I - licenciatura em química / Melquisedec Lourenço da Silva. Salvador: UNEB/  
EAD, 2009.  
126p.

1.Física 2. mediação 3.energia cinética I. Título II. Curso de graduação em química  
III. Universidade Aberta do Brasil IV. UNEB /NEAD

CDD: 530

PRESIDENTE DA REPÚBLICA  
**Luis Inácio Lula da Silva**

MINISTRO DA EDUCAÇÃO  
**Fernando Haddad**

SECRETÁRIO DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA  
**Carlos Eduardo Bielschowsky**

DIRETOR DO DEPARTAMENTO DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA  
**Hélio Chaves Filho**

**SISTEMA UNIVERSIDADE ABERTA DO BRASIL**  
DIRETOR DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA DA CAPES  
**Celso Costa**

COORD. GERAL DE ARTICULAÇÃO ACADÊMICA DA CAPES  
**Nara Maria Pimentel**

GOVERNO DO ESTADO DA BAHIA  
GOVERNADOR  
**Jaques Wagner**

VICE-GOVERNADOR  
**Edmundo Pereira Santos**

SECRETÁRIO DA EDUCAÇÃO  
**Oswaldo Barreto Filho**

UNIVERSIDADE DO ESTADO DA BAHIA - UNEB  
REITOR  
**Lourivaldo Valentim da Silva**

VICE-REITORA  
**Amélia Tereza Maraux**

PRÓ-REITORA DE ENSINO DE GRADUAÇÃO  
**Mônica Moreira Torres**

COORDENADOR UAB/UNEB  
**Silvar Ferreira Ribeiro**

COORDENADOR UAB/UNEB ADJUNTO  
**Jader Cristiano Magalhães de Albuquerque**

DIRETOR DO DEDC – I  
**Antônio Amorim**

**NÚCLEO DE EDUCAÇÃO A DISTÂNCIA - NEAD**  
COORDENADOR  
**Arnaud Soares de Lima Junior**

VICE-COORDENADOR  
**Silvar Ferreira Ribeiro**

COORDENADOR ADMINISTRATIVO  
**Jader Cristiano Magalhães de Albuquerque**

COORDENADORA PEDAGÓGICA  
**Sônia Maria da Conceição Pinto**

COORDENADORA DE MATERIAL DIDÁTICO  
**Kathia Marise Borges Sales**

COORDENADOR DE TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO  
**Marcus Túlio Freitas Pinheiro**

COORDENADOR DE RELAÇÕES INTERINSTITUCIONAIS  
**Emanuel do Rosário Santos Nonato**

COORDENADOR DO CURSO DE LICENCIATURA EM QUÍMICA  
**Marta Valeria Santana de Andrade**



## Prezado estudante,

Este módulo é parte do material didático que dá suporte as suas atividades de auto-estudo e auto-formação no curso de Química na modalidade a distância.

Cada componente curricular dispõe de um material impresso correspondente, especialmente preparado para este curso, por docentes - pesquisadores, selecionados por sua inserção e produção na área de conteúdo específica.

Além deste módulo, você também dispõe de material em mídia e do Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA).

Procure conhecer e explorar o máximo possível todo o material disponibilizado para o seu curso.

É importante ter consciência que este é um material básico, especialmente preparado para lhe oferecer uma visão essencial ao estudo do conteúdo de cada componente curricular. Portanto, ele não tem o objetivo de ser o único material para pesquisa e estudo. Pelo contrário, durante o decorrer do texto, o próprio módulo sugerirá outras leituras, apontando onde você pode encontrar fontes para aprofundar, verticalizar ou trazer outros olhares sobre a temática abordada.

Observe que, no decorrer deste módulo, os autores abrem caixas de diálogo para que você construa como interlocutor ativo, a sua leitura do texto. Elas aparecem com os ícones e objetivos listados a seguir:



**Você sabia?** – convida-o a conhecer outros aspectos daquele tema/conteúdo. São curiosidades ou informações relevantes que podem ser associadas à discussão proposta;



**Saiba mais** – apresenta notas ou aprofundamento da argumentação em desenvolvimento no texto, trazendo conceitos, fatos, biografias, enfim, elementos que o auxiliem a compreender melhor o conteúdo abordado;



**Indicação de leituras** – neste campo, você encontrará sugestão de livros, sites, vídeos.

A partir deles, você poderá aprofundar seu estudo, conhecer melhor determinadas perspectivas teóricas ou outros olhares e interpretações sobre aquele tema;



**Sugestões de atividades** – consistem em indicações de atividades para você realizar autonomamente em seu processo de auto-estudo. Estas atividades podem (ou não) vir a ser aproveitadas pelo professor-formador como instrumentos de avaliação, mas o objetivo primeiro delas é provocá-lo, desafiá-lo em seu processo de auto-aprendizagem.

Então caro estudante, encare este material como um parceiro de estudo, dialogue com ele, procure as leituras que ele indica, desenvolva as atividades sugeridas e, junto com seus colegas, busque o apoio dos tutores e a orientação do professor formador. Seja autor da sua aprendizagem.

Bom estudo!

Coordenação de Material Didático  
Núcleo de Educação a Distância - NEAD



## CAROS ESTUDANTES

A Física, assim como a matemática e a química, é uma disciplina científica que requer de vocês uma atenção especial, devido a sua importância para as carreiras técnicas em geral. Caracteriza-se de grande relevância para os cursos de Ciências, Engenharia, Arquitetura e até mesmo para os cursos da área de saúde. Devido ao seu valor significativo, está presente em qualquer invento mecânico já realizado pelo Homem.

Antes de começar a estudar Física, é fundamental que vocês compreendam a importância da matéria e o que é basicamente necessário fazer para alcançar um bom desempenho.

A Física, instrumento para a compreensão do mundo em que vivemos, possui também uma beleza conceitual ou teórica, que por si só poderia tornar seu aprendizado agradável. Esta beleza, no entanto, é comprometida pelos tropeços num instrumental matemático com o qual a Física é frequentemente confundida. Vocês só aprenderão Física se realmente quiserem aprender. Não decorem, procurem aprender. A matemática é uma ferramenta importante nesse processo de aprendizagem de Física. Mas ela não deve ser um empecilho para seus estudos. Surgiu alguma dúvida? Não hesitem! Recorram ao que vocês já aprenderam no passado. Não permitam que as dúvidas se acumulem. Vamos aprender a criar o hábito de estudar periodicamente. Para isso, consultem a biblioteca auxiliar, usem a internet, leiam livros, vejam vídeos.

Vocês precisam se convencer de que a Física não é difícil, apenas requer um pouco mais de estudo. Leiam atentamente todo o texto, procurando adquirir o conhecimento geral da matéria. Assinalem as passagens que julgarem importantes. Façam resumos, se julgarem necessário. A resolução de exercícios é uma arma importantíssima para o aprendizado de Física. Por isso, procurem fazer vários exercícios de um mesmo assunto até que consigam adquirir gradativamente o amadurecimento na matéria.

Este módulo tem a finalidade perfeitamente marcada de iniciá-los no estudo da Mecânica Clássica, uma parte da física alicerçada nas Leis de Newton para o movimento dos corpos. A apresentação de tal conteúdo representa um trabalho didático progressivo cujas noções iniciais são tratadas de modo elementar, em atenção às dificuldades dos estudantes. Pouco a pouco o nível irá se elevando, mas sem prejudicar a clareza, à medida que os conteúdos irão surgindo. Para todos os conteúdos, serão apresentados exercícios resolvidos de forma detalhada para facilitar o entendimento.

Em um primeiro momento abordaremos uma parte da mecânica denominada Cinemática. Aqui os movimentos de corpos físicos serão estudados sem se preocupar com os agentes causadores desse movimento. Estudaremos também algumas das Grandezas e Unidades básicas utilizadas na mecânica. Muitas outras novas Grandezas serão apresentadas à medida que os conhecimentos aumentarem. Em um segundo momento, estudaremos as causas dos movimentos dos corpos. Essa parte da mecânica é denominada Dinâmica. Aqui serão apresentadas as Leis de Newton e as denominações de alguns tipos de força. Aprenderemos como aplicar as leis de Newton para estudar o movimento de partículas. Por último, entenderemos o significado da conservação da energia mecânica. Situações práticas do cotidiano geral serão sempre tomadas como exemplo para ilustrar as aplicações do nosso estudo.

**Melquisedec Lourenço da Silva**



## SUMÁRIO

<b>1. MEDIÇÃO: GRANDEZAS FÍSICAS, UNIDADES E VETORES</b>	13
1.1. Introdução	13
1.2. Grandezas Físicas	13
1.3. Padrões e Unidades	13
1.3.1. Tempo	14
1.3.2. Comprimento	14
1.3.3. Massa	14
1.4. Prefixos	15
1.5. Conversão de Unidades	15
1.6. Grandezas Vetoriais	17
1.7. Operações com Vetores	19
1.7.1. Soma Vetorial	19
1.7.2. Decomposição de Vetores	20
1.7.3. Multiplicação de Vetores	23
<b>2. MOVIMENTO LINEAR EM UMA DIMENSÃO</b>	26
2.1. Introdução	26
2.2. Posição, Espaço Percorrido e Trajetória	26
2.3. Velocidade	27
2.4. Aceleração	30
2.5. Movimento Uniformemente Variável – Aceleração Constante	32
2.6. Queda Livre	35
<b>3. MOVIMENTO EM DUAS E TRÊS DIMENSÕES</b>	39
3.1. Introdução	39
3.2. Vetor Posição	39
3.3. Velocidade Vetorial	40
3.4. Vetor Aceleração	41
3.5. Movimento em Mais de uma Dimensão com Aceleração Constante	45
3.6. Lançamento de Projéteis	45
3.7. Movimento Circular Uniforme - MCU	49
3.8. Movimento Relativo	51
<b>4. DINÂMICA DA PARTÍCULA</b>	56
4.1. Introdução	56
4.2. Primeira Lei de Newton	56

4.3. Força	57
4.4. Massa e a Segunda Lei de Newton	58
4.6. Peso e Massa	60
4.7. Aplicações das Leis de Newton	61
4.8. Força de Atrito	66
4.8.1. Atrito Estático	66
4.8.2. Atrito Dinâmico (ou Cinético)	67
4.9. Força Centrípeta	70
<b>5. TRABALHO E ENERGIA CINÉTICA</b>	74
5.1. Introdução	74
5.2. Trabalho realizado por uma força constante	74
5.3. Trabalho realizado por uma força variável	77
5.4. Energia Cinética e Teorema do Trabalho-Energia	80
5.5. Potência	82
<b>6. LEI DE CONSERVAÇÃO DA ENERGIA MECÂNICA</b>	87
6.1. Introdução	87
6.2. Forças Conservativas e não-Conservativas	87
6.2.1. A Força Gravitacional é Conservativa?	87
6.2.2. A Força Elástica é Conservativa?	88
6.2.3. A Força de Atrito é Conservativa?	89
6.3. Energia Potencial	89
6.3.1. Energia Potencial Gravitacional	91
6.3.2. Energia Potencial Elástica	91
6.4. Forças Dissipativas	93
6.5. A Conservação da Energia	93
<b>7. LEI DE CONSERVAÇÃO DO MOMENTO LINEAR</b>	101
7.1. Introdução	101
7.2. Centro de Massa	101
7.3. Movimento do Centro de Massa	105
7.4. Momento Linear	113
7.5. Conservação do Momento Linear	114
7.6. Colisões	117
7.6.1. Colisões Elásticas	118
7.6.2. Colisões Inelásticas	118
<b>8. REFERÊNCIAS</b>	126



## 1. MEDIÇÃO: GRANDEZAS FÍSICAS, UNIDADES E VETORES

### 1.1. Introdução

Sendo a Física uma ciência basicamente experimental, a medição ou a determinação dos valores numéricos que medem as suas grandezas é de fundamental importância e deve ser feita com a maior precisão possível. Muitas vezes, da determinação correta dessas medidas podem depender vidas humanas, como no cálculo da estrutura de um edifício, de uma ponte, na determinação do desempenho aerodinâmico de um avião ou mesmo do momento exato da aplicação de um medicamento.

Apresentaremos, neste capítulo inicial, algumas definições importantes que serão úteis em nosso estudo. Introduziremos os conceitos de grandezas físicas, escalares e vetoriais, suas unidades de medidas e discutiremos como representar a exatidão de um número em uma medida. Por fim, apresentaremos um estudo de diversos aspectos dos vetores e da álgebra vetorial. Os vetores são permanentemente usados em física para descrever e analisar grandezas como posição, velocidade e força.

### 1.2. Grandezas Físicas

As grandezas básicas em física devem ser definidas de forma clara e com precisão. Dentro da comunidade científica é consenso admitir que para se definir uma grandeza física é necessário estabelecer os processos para medi-la. Esta definição é basicamente um conjunto de operações de laboratório que conduzem a um número e uma unidade. Isto nos permite dizer que uma grandeza física é tudo aquilo que podemos medir e para o qual atribuímos um valor numérico e uma unidade de medida.

Podemos dividir as grandezas físicas em dois grupos: **grandezas fundamentais e grandezas derivadas**. Consideram-se grandezas derivadas, aquelas que podem ser obtidas a partir das grandezas fundamentais ou de outras grandezas físicas. Por exemplo, o volume é considerado uma grandeza derivada, pois ele é encontrado através de operações matemática envolvendo o comprimento. Por sua vez, o comprimento é uma grandeza fundamental. Na definição das grandezas fundamentais deve-se primeiro escolher um padrão e em seguida estabelecer os processos para comparar o padrão com a grandeza a ser medida. A partir desses processos é determinado um valor numérico e uma unidade como medida dessa grandeza.

### 1.3. Padrões de Unidades

Quando realizamos a medida de uma grandeza, estamos comparando-a com um padrão que tomamos como referência. Suponhamos que escolhemos uma barra com certo comprimento como padrão da grandeza comprimento e definimos como sendo um metro. Assim quando vocês medem a altura de uma construção e percebe que ela é seis vezes maior que sua barra padrão, então se pode dizer que a construção possui seis metros de altura.

Historicamente, foram definidos alguns padrões para medidas que necessitaram ser substituídos por serem grosseiros ou por variarem de uma região para outra. Por exemplo, o padrão de unidades de comprimento como pé e polegada era definido diretamente de partes do corpo do rei de um determinado lugar. Isto dificultava as relações comerciais entre países. Logo, um padrão para ser considerado ideal tem que ser acessível a todos e invariável.

Quando definimos um padrão para a medida de uma grandeza, estabelecemos também uma *unidade* para aquela grandeza. O metro é uma unidade de comprimento, o segundo é uma unidade de medida de uma grandeza, estamos comparando-a com um padrão que tomamos como referência. Suponhamos que escolhemos uma barra com certo comprimento como padrão da grandeza *comprimento* e definimos como sendo um metro. Assim quando vocês medem a altura de uma construção e percebe que ela é seis vezes maior que sua barra padrão, então se pode dizer que a construção possui seis metros de altura.



Historicamente, foram definidos alguns padrões para medidas que necessitaram ser substituídos por serem grosseiros ou por variarem de uma região para outra. Por exemplo, o padrão de unidades de comprimento como pé e polegada era definido diretamente de partes do corpo do rei de um determinado lugar. Isto dificultava as relações comerciais entre países. Logo, um padrão para ser considerado ideal tem que ser acessível a todos e invariável. Assim, no exemplo anterior, a medida da altura da construção possuía seis unidades de um padrão estabelecido, o qual chamamos de metro.

O **Sistema Internacional de Unidades (SI)** é um conjunto de definições utilizado em quase todo o mundo pelos cientistas que foi criado em 1960 com o intuito de uniformizar e facilitar as medidas. Neste módulo usaremos basicamente as unidades estabelecidas pelo SI, porém, existem outros sistemas métricos, tal como o sistema CGS (centímetro-grama-segundo) utilizado em alguns países de língua inglesa, mas que vem sendo gradualmente substituído pelo SI.



### INDICAÇÃO DE LEITURA

*(<http://www.inmetro.gov.br/infotec/publicacoes/Si.pdf>).*

*No site do INMETRO vocês podem encontrar mais informações sobre grandezas físicas. Além de um texto contendo conceitos, informações básicas e informações históricas da conferência que estabeleceu o SI - Sistema Internacional de Unidades.*

#### 1.3.1. Tempo

A unidade de tempo foi adotada por muito tempo como sendo uma fração do dia. Porém, o avanço tecnológico exigiu e ao mesmo tempo possibilitou a adoção de um padrão mais preciso e invariável. Hoje utilizamos como padrão internacional de unidade de tempo o *segundo* baseado no relógio de Césio. Bombardeando o Césio com microondas de uma dada frequência, seus átomos sofrem uma mudança de estado. Um segundo é definido como o tempo necessário para ocorrer 9.192.631.770 ciclos desta radiação.

#### 1.3.2. Comprimento

O *metro* padrão já foi definido como a distância entre duas marcas em uma barra constituída de uma liga de platina-irídio. Esta barra foi mantida, em condições adequadas de temperatura e umidade, no Bureal de Pesos e Medidas, localizado na França. Porém a precisão desse padrão se tornou insuficiente para a ciência e as tecnologias modernas. Em 1983 o metro foi redefinido como a distância percorrida pela luz, no vácuo, em um intervalo de tempo igual a  $\frac{1}{299.792.458}$  segundos.

Atualmente nenhum país tem a necessidade de manter um objeto como comprimento padrão. É o bastante ter um laboratório de física capaz de reproduzir precisamente o metro padrão através da velocidade da luz.

#### 1.3.3. Massa

O padrão internacional de massa é definido como um cilindro feito de uma liga de platina-irídio, guardado no Bureal Internacional de Pesos e Medidas próximo de Paris. A este cilindro, conhecido como quilograma padrão, foi atribuído uma massa de um quilograma. Cópias desse padrão de massa são distribuídas pelo mundo a fim de padronizar a medida da massa.

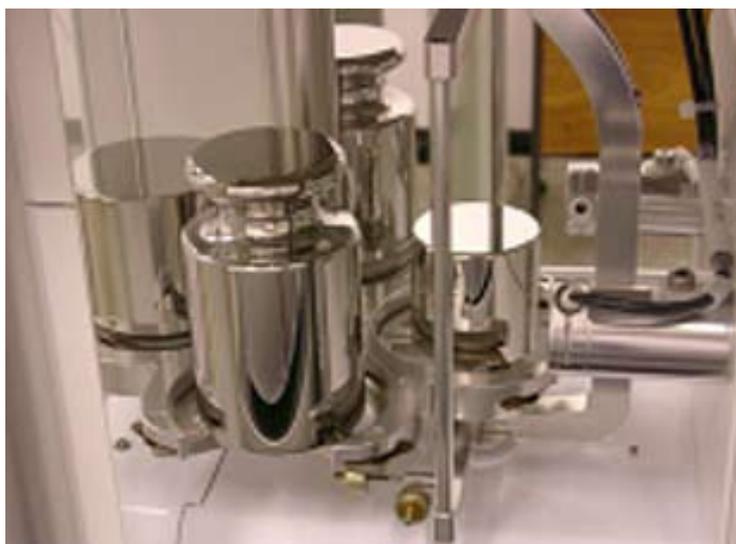


Figura 1: Equipamentos de referência e serviços de calibração e de medição do Lamas/Inmetro. Disseminação da escala de massa a partir do protótipo de um quilograma padrão de Pt-Ir. REFERÊNCIA: [www.inmetro.com.br](http://www.inmetro.com.br)

## 1.4. Prefixos

Os **prefixos** permitem escrever quantidades sem o uso da notação científica, de maneira mais clara para quem trabalha em uma determinada faixa de valores muito grande ou muito pequeno. Os prefixos oficiais são:

Múltiplos		
Nome	Fator	Símbolo
deca	$10^1$	da
hecto	$10^2$	h
quilo	$10^3$	k
mega	$10^6$	M
giga	$10^9$	G
tera	$10^{12}$	T
peta	$10^{15}$	P
exa	$10^{18}$	E
zeta	$10^{21}$	Z
iota	$10^{24}$	Y

Submúltiplos		
Nome	Fator	Símbolo
deci	$10^{-1}$	d
centi	$10^{-2}$	c
mili	$10^{-3}$	m
micro	$10^{-6}$	$\mu$
nano	$10^{-9}$	n
pico	$10^{-12}$	p
femto	$10^{-15}$	f
atto	$10^{-18}$	a
zepto	$10^{-21}$	z
yocto	$10^{-24}$	y

Para utilizarmos esses prefixos, basta juntarmos o nome dele ao nome da unidade e para representarmos seu símbolo devemos juntar os símbolos do prefixo juntamente com o da unidade. Exemplo

$$1 \text{ quilômetro} = 1 \text{ km} = 10^3 \text{ m}$$

$$1 \text{ miligrama} = 1 \text{ mg} = 10^{-3} \text{ g}$$

$$1 \text{ nanossegundo} = 1 \text{ ns} = 10^{-9} \text{ s}$$

## 1.5. Conversão de Unidades

Em ciências é comum usarmos equações para relacionar grandezas com suas respectivas unidades. O resultado dessas operações é uma grandeza que deve possuir uma unidade apropriada. Por exemplo, distância pode ser dada em metros (m), corrente elétrica pode estar em ampere (A), força em newton (N) e assim por diante. Porém, muitas vezes, vocês encontrarão situações onde será necessária uma mudança na unidade da grandeza. Por exemplo, numa medida de comprimento vocês podem necessitar mudar a unidade de centímetro para metro, numa medida de tempo, mudar de ano para segundos ou mesmo mudar de quilograma para grama uma medida de massa.

Para realizar a mudança de unidades vamos utilizar um método conhecido como conversão em cadeia. A idéia básica deste método é considerar que a divisão de quantidades iguais de uma mesma medida é igual a 1. Ou seja,

$$\frac{1m}{100cm} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{100cm}{1m} = 1 \quad (1)$$

ou

$$\frac{1h}{60\text{min}} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{60\text{min}}{1h} = 1 \quad (2)$$

Observem que isto não é a mesma coisa de dizer que  $\frac{1}{100} = \frac{100}{1} = 1$ . Esta afirmação é incorreta. O que estamos falando é que comprimento de 1 metro é equivalente a 100 centímetros e o intervalo de tempo de 1 hora é equivalente a 60 minutos.

Para representarmos uma medida de 30 metros em centímetros, por exemplo, podemos simplesmente realizar a mudança de unidades utilizando uma das frações da equação 1. Se multiplicarmos 30 m por uma daquelas frações não alteramos o valor de sua medida, pois aquelas frações valem 1. Assim,

$$30m = (30m) \left( \frac{100cm}{1m} \right) = 3000cm. \quad (3)$$

Nesta operação trabalhamos com as unidades da mesma forma como o fazemos com números e variáveis algébricas (usamos  $\frac{m}{m} = 1$ ). Observem que se tivéssemos utilizado a outra fração da equação 1, não teríamos cancelado as unidades,  $\frac{m}{m}$ , e teríamos encontrado a resposta  $0,3 \frac{m^2}{cm}$ . Esta unidade não é apropriada para representar a medida.

Agora suponham que seja necessário converter o intervalo de tempo de três dias para segundos.

$$3dias = (3dias) \left( \frac{24h}{1dia} \right) \left( \frac{60\text{min}}{1h} \right) \left( \frac{60s}{1\text{min}} \right) = 259.200s \quad (4)$$

Encontramos então que  $3 dias = 259\,200 s$ . Aqui utilizamos além da equação (2), o fato que  $\left( \frac{24h}{1dia} \right) = 1$  e que  $\left( \frac{60s}{1\text{min}} \right) = 1$ .

Obs.: Não podemos somar e nem subtrair grandezas que possuem unidades diferentes. Por exemplo, vocês não podem somar 2 \$ com 3 R\$. O resultado dessa operação não pode ser nem 5 \$ nem tão pouco 5 R\$. Antes vocês devem converter as medidas para a mesma unidade e depois de feito isso, realizar a soma.

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

Os carros de passeio comuns apresentam um consumo de cerca de 14,0 km/L e seu tanque de combustível possui uma capacidade média de 45,0 L. Sabendo que um litro corresponde a  $10^{-3} m^3$ , expressem

- a) a capacidade do tanque em  $cm^3$  e
- b) o consumo dos carros em  $hm/cm^3$ .

### Solução:

- a) Para resolver este problema iremos utilizar a regra da cadeia.

$$45,0L = (45,0L) \left[ \frac{10^{-3}m^3}{1L} \right] \left[ \frac{1cm}{10^{-2}m} \right]^3 = 45,0 \times 10^{-3} \left[ \frac{1}{10^{-6}} \right] cm^3 = 45000cm^3$$

Apesar de  $1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$ , observem que  $1 \text{ cm}^3$  não é igual a  $10^{-2} \text{ m}^3$ . Assim, para que pudéssemos cancelar a unidade  $\text{m}^3$ , usando a regra da cadeia, necessitamos elevar o termo  $(1 \text{ cm}/10^{-2} \text{ m})$  ao cubo, ficando apenas a unidade  $\text{cm}^3$ .

b) Vamos agora calcular o consumo do automóvel:

$$14,0 \frac{\text{km}}{\text{L}} = \left[ 14,0 \frac{\cancel{\text{km}}}{\cancel{\text{L}}} \right] \left[ \frac{10^3 \cancel{\text{m}}}{1 \cancel{\text{km}}} \right] \left[ \frac{1 \cancel{\text{hm}}}{10^2 \cancel{\text{m}}} \right] \left[ \frac{1 \cancel{\text{L}}}{10^{-3} \cancel{\text{m}^3}} \right] \left[ \frac{1 \cancel{\text{m}}}{10^2 \text{cm}} \right]^3 = \frac{14,0 \times 10^3}{10^2 \times 10^{-3} \times 10^6} \frac{\text{hm}}{\text{cm}^3}$$

$$14,0 \frac{\text{km}}{\text{L}} = 14,0 \times 10^{-2} \frac{\text{hm}}{\text{cm}^3} = 0,14 \frac{\text{hm}}{\text{cm}^3}$$

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

- Alguns dos prefixos do sistema internacional foram assimilados na linguagem cotidiana. Quantos metros têm em um quilômetro?
- Um prêmio da loteria pagou 25 mega reais.  
Expresse esse valor usando potência de dez.  
Expresse esse valor sem usar potência de dez.  
Se esse valor fosse dividido na forma de salário ao longo de 40 anos, de quanto seria esse salário?
- Um disco rígido de um computador tem capacidade de 160 MB (160 megabytes). Considerando que uma palavra ocupa 8 bytes, quantas palavras ele pode armazenar? Lembrem-se, em informática, um quilo não corresponde a  $10^3$  e sim a  $2^{10} = 1024$ .
- Existem 365,25 dias em um ano. Quantos segundos têm em um ano?
- O vencedor de uma maratona fez seu percurso em 1 hora, 16 minutos e 32 segundos. Quantos segundos ele correu nesta maratona?
- A Lua é aproximadamente uma esfera de raio igual a  $1,74 \times 10^6 \text{ m}$ .  
Qual seria o comprimento da linha do equador na Lua, em quilômetros?  
Qual a área da superfície da Lua em quilômetros quadrado?  
Qual o volume da Lua em quilômetros cúbicos?  
Considerando que o raio da Terra é aproximadamente quatro vezes maior que o raio da Lua, resolva os itens (a), (b) e (c) desta questão considerando o raio da Terra.
- Um fabricante informa na embalagem que uma determinada tinta é capaz de pintar 520 metros quadrados por galão ( $\text{m}^2/\text{gal}$ ). Dados: 1 galão = 231 polegadas cúbicas; 1 polegada = 2,54 centímetros; 1 litro = 1000 centímetros cúbicos e 1 pé = 30,48 cm.  
a) Expresse essa quantidade em pés quadrado por litro ( $\text{pés}^2/\text{l}$ ).  
b) Expresse essa quantidade em unidades fundamentais do SI.
- Ano-luz é uma unidade de comprimento muito utilizada em astronomia. Sendo um ano-luz igual a  $9,46 \times 10^{12} \text{ km}$ , expresse a distância do Sol a Terra ( $1,5 \times 10^{11} \text{ m}$ ) em anos-luz.
- Determinada areia é feita de dióxido de silício e  $1,0 \text{ m}^3$  dessa areia possui uma massa de 2600,0 kg. Sendo o raio médio de um grão de areia igual a  $50,0 \mu\text{m}$ , calcule a sua massa.

## 1.6. Grandezas Vetoriais

Quando dizemos que uma medida de tempo é 10 min, a largura de um objeto é 50 cm, ou que a temperatura de uma sala é igual a  $35^\circ \text{C}$ , está clara a informação que desejamos passar. Não necessitamos de nenhuma informação

a mais para que vocês entendam estas medidas. Dizemos então que para as informações a respeito destas medidas estarem completas, necessita apenas de um valor numérico e uma unidade para cada medida.

Grandezas físicas que ficam perfeitamente representadas com um valor numérico e uma unidade é chamada de Grandezas Escalares. Assim, tempo, largura, temperatura, corrente elétrica, massa, são alguns exemplos de grandezas escalares.

Agora suponham que alguém realizou a medida do deslocamento de um trenó no meio de um lago congelado. Esta medida foi representada como sendo 5,0 metros. Temos aí um valor numérico e uma unidade. Porém, esta informação não está completa. Para onde o trenó foi após o deslocamento? Ele pode ter ido para qualquer posição em uma circunferência de raio 5,0 m.

Quando aplicamos uma força de 10 newtons sobre um objeto, qualquer coisa pode acontecer. Depende de como esta força foi aplicada. Se a força foi aplicada de um dos lados, o objeto pode ser deslocado. Se for aplicada de cima para baixo, o objeto pode ser amassado. Se aplicado de baixo para cima, ele pode ser suspenso (vejam a figura 2).

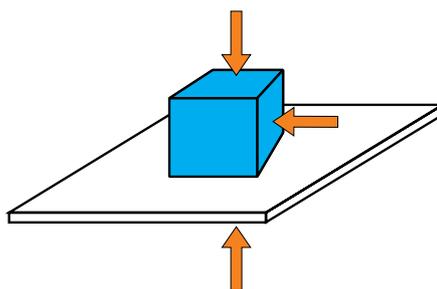


Figura 2: Força aplicada em uma caixa em diferentes direções.

O deslocamento e a força são exemplos de grandezas físicas chamadas de **Grandezas Vetoriais**. As medidas destas grandezas para ficarem claras, necessitam mais que um valor numérico e uma unidade. É necessário que sejam dadas a elas uma direção e um sentido. Outros exemplos de grandezas vetoriais são a posição, a velocidade, a aceleração etc. Para se representar uma grandeza vetorial deve-se informar seu módulo, direção e sentido, onde o módulo corresponde ao valor numérico com sinal positivo.

Utilizamos uma flecha para representar um vetor e esta nos possibilita identificar a direção e o sentido da grandeza física medida. Imagine que um ônibus realizou uma viagem de Salvador a Natal. Independente do percurso que ele fez, o seu deslocamento é representado por um vetor (flecha) ligando Salvador a Natal. Podemos chamar esse vetor deslocamento pela letra  $\vec{A}$  com uma flechinha em cima, para diferenciar a grandeza vetorial. Esta forma de representar o vetor é útil para fazer vocês lembrarem que esta grandeza apresenta propriedades diferentes de uma grandeza escalar que normalmente é representada por uma variável qualquer, por exemplo,  $t$  para o tempo.



Figura 3: O vetor  $\vec{A}$  é o deslocamento de Salvador até Natal. O vetor deslocamento é sempre traçado do ponto inicial até o ponto final, mesmo que seja uma trajetória curvilínea.

## 1.7. Operações com Vetores

Como vimos na seção anterior, um vetor qualquer  $\vec{A}$  é representado graficamente através de um segmento orientado (uma flecha). A vantagem dessa representação é que ela permite especificar a **direção** (esta é dada pela reta que contém a flecha) e o **sentido** (especificado pela farpa da flecha). Além disso, o seu módulo (indicado com  $A$  ou  $|\vec{A}|$ ) será especificado pelo “tamanho” da flecha, a partir de alguma convenção para a escala. Por definição, o módulo de um vetor é uma grandeza escalar (um número), sendo sempre positivo.

Qualquer vetor  $\vec{B}$  para ser igual ao vetor  $\vec{A}$  deve apresentar o mesmo sentido, direção e módulo (Figura 4). Por outro lado, se  $\vec{C} = -\vec{A}$ , então  $\vec{C}$  é um vetor que tem o mesmo módulo e a mesma direção do vetor  $\vec{A}$ , porém com o sentido oposto. Assim, em uma operação com vetores, o sinal negativo em  $-\vec{A}$ , por exemplo, indica que o vetor possui o sentido inverso ao vetor  $\vec{A}$ .

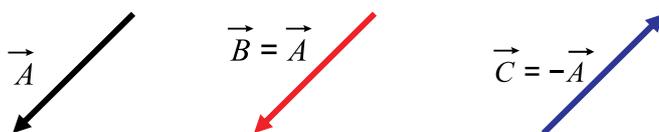


Figura 4

### 1.7.1. Soma Vetorial

Operações com vetores obedecem a regras diferentes das operações com grandezas escalares. Com grandezas escalares, a soma  $3 + 4 = 7$ . Porém, com grandezas vetoriais devemos lembrar que estamos lidando com grandezas que possuem direção e sentido. Assim, por exemplo, para somar o vetor  $\vec{A}$  com o vetor  $\vec{B}$  iremos encontrar como resultante um outro vetor  $\vec{C}$  que poderá ter uma direção e um sentido completamente diferente de  $\vec{A}$  e de  $\vec{B}$ . Esta soma é expressa simbolicamente por  $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ .

Para realizar uma soma vetorial, desenhamos o primeiro vetor ( $\vec{A}$ ) e no final deste, desenhamos o início do segundo vetor ( $\vec{B}$ ). O vetor resultante  $\vec{C}$  será o segmento (flecha) que liga o início do primeiro vetor com o final do segundo vetor. Observem os exemplos de somas vetoriais na figura 5.

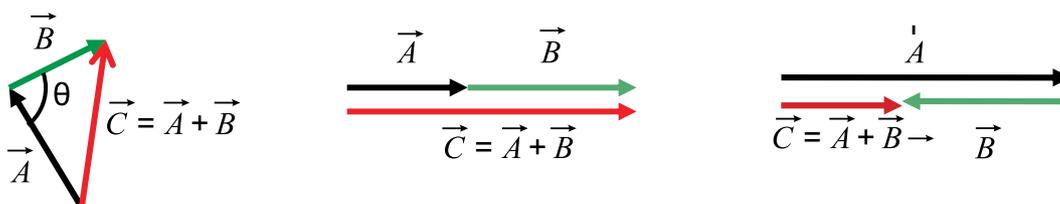


Figura 5

Observem que se os vetores  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  estiverem no mesmo sentido, o módulo do vetor resultante será a soma dos módulos de  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ . Se  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$  tiverem sentidos opostos, o módulo de  $\vec{C}$  será a subtração dos módulos de  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ . Se os vetores a ser somados não estiverem na mesma direção, obteremos um triângulo. Então para encontrar o módulo do vetor resultante,  $|\vec{C}|$ , utilizamos a lei dos cossenos:

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AC \cdot \cos\theta \Rightarrow C = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AC \cdot \cos\theta} \quad (5)$$

Havendo necessidade de somar mais que dois vetores, o procedimento será o mesmo. Ou seja, desenha-se o primeiro, onde termina o primeiro começa o segundo, onde termina o segundo começa o terceiro e assim por diante. O vetor resultante será a flecha que liga o início do primeiro a final do último. Vejam na figura (6b) a operação  $\vec{S} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ . Alternativamente vocês também podem somar  $\vec{A} + \vec{B} = \vec{D}$  e o resultado somar com o vetor  $\vec{C}$  (Vejam na figura 6c).

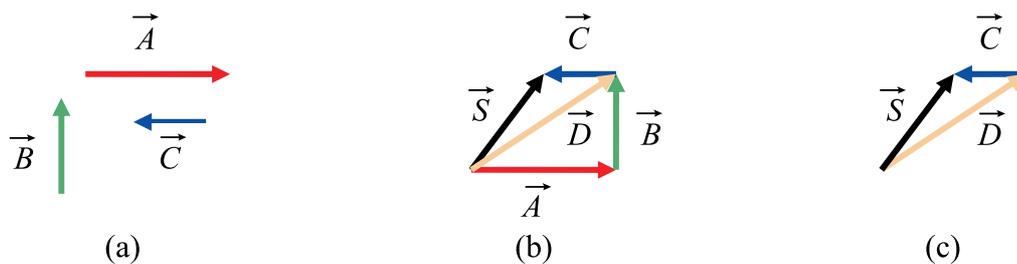


Figura 6

A operação de subtração de vetores é semelhante à adição. Vejam o exemplo da figura 7. Para subtrair o vetor  $\vec{B}$  do vetor  $\vec{A}$ , somamos o vetor  $\vec{A}$  com o vetor  $(-\vec{B})$ . Ou seja,

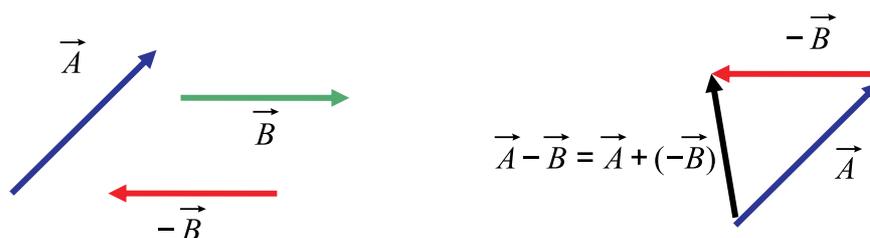


Figura 7



### SAIBA MAIS

([http://blog.educacional.com.br/blog\\_de\\_fisica/p55628](http://blog.educacional.com.br/blog_de_fisica/p55628)) Neste blog vocês encontrarão um simulador onde se poderão ajustar dois vetores e observar o vetor soma. Lá é apresentado um outro método para calcular o vetor soma chamado de **método do paralelogramo**. Vale a pena praticar.

## 1.7.2. Decomposição de Vetores

Todo vetor pode ser representado por outros vetores chamados de componentes retangulares. Esta representação é útil quando necessitamos realizar operações vetoriais no espaço tridimensional.

Considerem o vetor  $\vec{a}$  na figura 8a e duas direções de referência  $Ox$  e  $Oy$ , formando o sistema de eixos cartesianos. Determinamos as componentes retangulares do vetor  $\vec{a}$  como sendo as projeções ortogonais da origem e da extremidade do vetor nas duas direções.

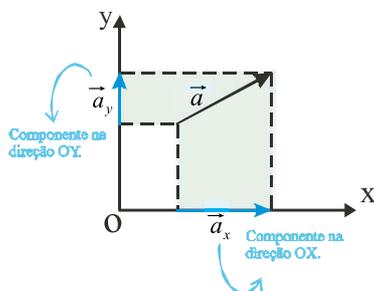


Figura 8a

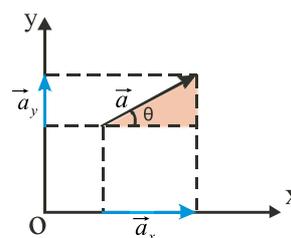


Figura 8b

O vetor  $\vec{a}$  pode ser representado pelas duas componentes  $\vec{a}_x$  e  $\vec{a}_y$ , sendo válida a relação

$$\vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y. \quad (6)$$

Quando estamos trabalhando com o módulo dos vetores, em operações, por exemplo, é apropriado representarmos o vetor como segue

$$\vec{a} = (a_x; a_y).$$

Onde usamos  $a_x$  e  $a_y$  que são os módulos das componentes do vetor separados por “;” (ponto e vírgula) para diferenciar da vírgula usada nas casas decimais numéricas.

Vocês poderiam se perguntar, qual o significado das componentes do vetor? Bem amiguinhos, significa que os dois vetores componentes atuando nas direções  $x$  e  $y$  podem substituir o vetor  $\vec{a}$ , produzindo o mesmo efeito.

Para determinar os módulos destas componentes  $\vec{a}_x$ ,  $\vec{a}_y$  e do vetor  $\vec{a}$ , aplicam-se as relações trigonométricas para o triângulo retângulo mostrado na figura 8b:

$$\text{sen}\theta = \frac{a_y}{a} \quad \Rightarrow \quad a_y = a \cdot \text{sen}\theta \quad (7)$$

$$\text{cos}\theta = \frac{a_x}{a} \quad \Rightarrow \quad a_x = a \cdot \text{cos}\theta \quad (8)$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad (9)$$

Suponham que representamos os vetores  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  e  $\vec{C}$  por suas componentes tridimensionais:

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z \\ \vec{B} &= \vec{B}_x + \vec{B}_y + \vec{B}_z . \\ \vec{C} &= \vec{C}_x + \vec{C}_y + \vec{C}_z \end{aligned} \quad (10)$$

Para encontrar o vetor resultante  $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$  devemos somar o módulo das componentes  $x$ ,  $y$  e  $z$  de cada vetor separadamente. Ou seja,

$$\begin{aligned} R_x &= A_x + B_x + C_x \\ R_y &= A_y + B_y + C_y . \\ R_z &= A_z + B_z + C_z \end{aligned} \quad (11)$$

Encontramos assim o vetor resultante  $\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y + \vec{R}_z$ , cujo módulo será  $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$ .

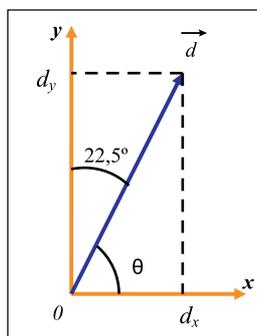


### SAIBA MAIS

([http://blog.educacional.com.br/blog\\_de\\_fisica/p55179](http://blog.educacional.com.br/blog_de_fisica/p55179)) Neste blog vocês encontrarão um simulador onde se pode ajustar um vetor e observar seus componentes cartesianos, bem como o ângulo entre o vetor e o eixo  $Ox$ . ([http://blog.educacional.com.br/blog\\_de\\_fisica/p56105](http://blog.educacional.com.br/blog_de_fisica/p56105)) Nesta outra página um simulador mostra a soma de dois vetores usando o método de decomposição dos vetores. Pratique.

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

Um navio percorre 130 km em uma linha reta que faz um ângulo de  $22,5^\circ$  com a direção norte-sul. Quais são as componentes do deslocamento do navio nas direções norte-sul e leste-oeste?



### SOLUÇÃO:

Representamos o deslocamento do navio como na figura ao lado. Se chamarmos o deslocamento de  $\vec{d}$ , então  $d_x$  será a componente na direção leste-oeste e  $d_y$  será a componente na direção norte-sul. Temos:

$$\theta = 90^\circ - 22,5^\circ = 67,5^\circ$$

então

$$d_x = d \cdot \cos\theta = 130 \cdot \cos(67,5) = 50 \text{ km}$$

$$d_y = d \cdot \sin\theta = 130 \cdot \sin(67,5) = 120 \text{ km}$$

O vetor é escrito como

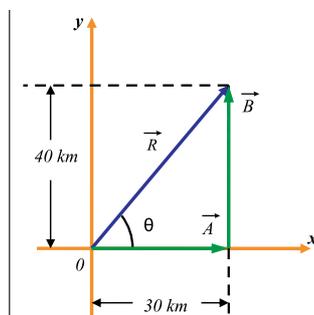
$$\vec{v} = (50;120) \text{ km}$$

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

Uma motocicleta percorre 30 km para leste, numa estrada plana. Num cruzamento ela vira para o norte e percorre mais 40 km. Achar o deslocamento resultante do automóvel.

### SOLUÇÃO:

Representando os dois deslocamentos sucessivos por  $\vec{A}$  e  $\vec{B}$ , o deslocamento resultante é obtido da relação  $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ .



Como  $\vec{B}$  não tem componente x, nem  $\vec{A}$  tem componente y, temos:

$$R_x = A_x + B_x = 30 + 0 = 30 \text{ km}$$

$$R_y = A_y + B_y = 0 + 40 = 40 \text{ km}$$

$$\vec{R} = (30;40) \text{ km}$$

O módulo do deslocamento resultante será

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \text{ km}$$

$$\text{tg}\theta = \frac{R_y}{R_x} = \frac{40}{30} = 1,33 \Rightarrow \theta = \text{arctg}(1,33) = 53^\circ.$$

O vetor deslocamento resultante  $\vec{R}$  tem módulo igual a 50 km e faz um ângulo de  $53^\circ$  com a direção oeste-leste.

### 1.7.3. Multiplicação de Vetores

#### (a) Multiplicação por um escalar

A multiplicação ou divisão de um vetor por um escalar resulta num vetor em segmento de reta paralelo ao vetor original e o módulo do vetor resultante será o produto (ou divisão) do módulo do vetor originário com o escalar. Se o escalar for positivo, o vetor resultante terá o mesmo sentido do vetor original e se o escalar for negativo, o vetor resultante terá sentido oposto.

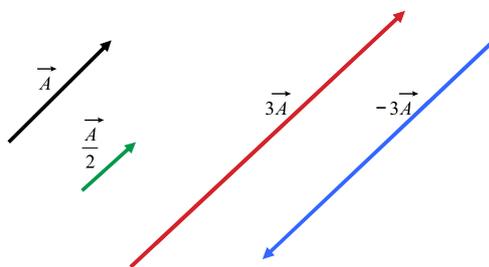


Figura 9

#### (b) Produto escalar

Define-se o produto escalar de dois vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  como a operação:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos\theta. \quad (12)$$

Onde  $\theta$  é o ângulo formado pelos dois vetores e  $a$  e  $b$  são os módulos dos vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ , respectivamente. Como  $a$ ,  $b$  e  $\cos\theta$  são escalares, o resultado de um produto escalar é também um escalar. Por essa razão, a ordem da operação não é importante em um produto escalar:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ .

Podemos dizer que o produto escalar de dois vetores é igual ao módulo do primeiro, vezes a componente do segundo no eixo determinado pelo primeiro, ou vice-versa.

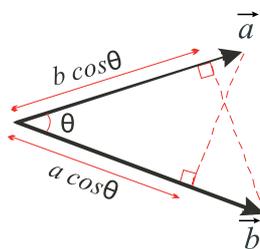


Figura 10

#### (c) Produto Vetorial

Define-se o produto vetorial de dois vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  como a operação  $\vec{a} \times \vec{b}$ . Esta resulta em um outro vetor  $\vec{c}$ , cujo módulo é dado por:

$$\vec{a} \times \vec{b} = ab \cdot \text{sen}\theta \quad (13)$$

A direção do vetor  $\vec{c}$  é perpendicular ao plano definido pelos vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$ .  $\theta$  é o ângulo formado por esses dois últimos dois vetores.

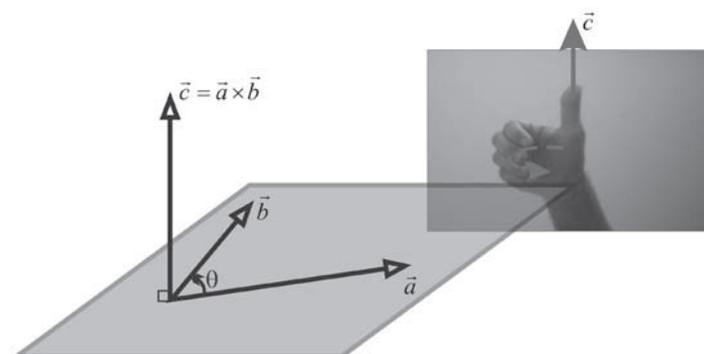


Figura 11: Vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  no plano horizontal e  $\vec{c}$  perpendicular ao plano no sentido para cima.

Para se especificar o sentido do vetor  $\vec{c}$  podemos utilizar um método conhecido como “regra da mão direita”: mantém-se a mão direita de forma que os dedos se curvem de  $\vec{a}$  para  $\vec{b}$ . O polegar estendido apontará o sentido do vetor resultante  $\vec{c}$  (Vejam a figura 11).

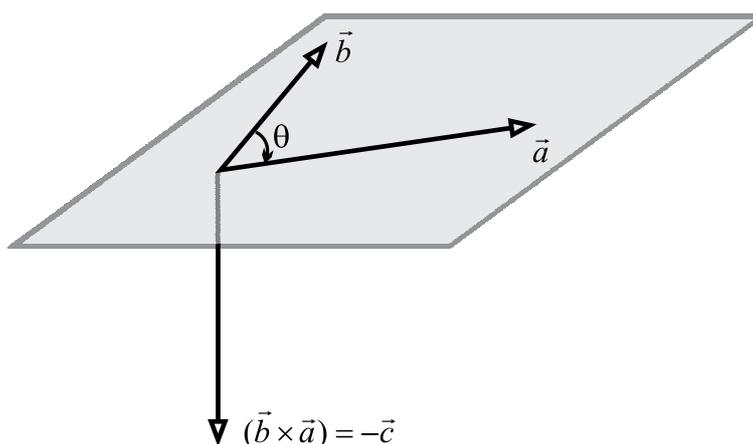


Figura 12: Vetores  $\vec{a}$  e  $\vec{b}$  no plano horizontal e  $\vec{c}$  perpendicular ao plano no sentido para baixo.

Observem, utilizando a regra da mão direita, que o sentido do vetor  $\vec{c}$  muda quando invertemos a ordem no produto vetorial (Figura 12). Isto significa que  $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ .

## EXERCÍCIO PROPOSTOS

- O módulo da diferença entre dois vetores será sempre menor que o módulo de cada vetor? E menor que o módulo de sua soma? Dê exemplos.
- Em que condições a soma de três vetores tem resultado nulo? Dê exemplos.
- O produto escalar entre dois vetores pode ser negativo? E o produto vetorial?
- Um vetor  $\vec{M}$  tem módulo de 15,0 unidades na direção leste. Outro vetor,  $\vec{N}$ , de módulo igual a 10,0 unidades, forma  $25^\circ$  com a direção leste (para o sudeste). Construa um diagrama vetorial e calcule os módulos de  $\vec{M} + \vec{N}$  e de  $\vec{M} - \vec{N}$ .

14. Suponha que o ponteiro de minuto de um relógio está representando um vetor. Esse ponteiro mede 20,0 cm desde o eixo até a extremidade. Escreva, através de componentes, o vetor quando este ponteiro indica:
- 7,5 min;
  - 30 min;
  - 45 min;
  - 52,5 min.
15. Dados dois vetores no plano  $xy$ ,  $\vec{m} = (4; -3)$  e  $\vec{n} = (6; 8)$ . Determine o módulo e as direções de  $\vec{m}$ ,  $\vec{n}$ ,  $\vec{m} + \vec{n}$  e  $\vec{m} - \vec{n}$ .
16. Um vetor  $\vec{a}$  de módulo igual a 5,0 unidades e outro vetor  $\vec{b}$  de módulo igual a 3,0 unidades formam entre si um ângulo de  $60^\circ$ . Determine:
- O produto escalar entre esses dois vetores e
  - O produto vetorial  $\vec{b} \times \vec{a}$ .
17. O vetor  $\vec{r}$  pertence ao plano  $xy$ , faz  $60^\circ$  com o eixo  $y$  e tem módulo igual a 32 unidades. O vetor  $\vec{s}$  pertence ao plano  $xz$ , faz um ângulo de  $40^\circ$  com o eixo  $x$  e tem módulo igual a 14 unidades. Determine:
- $\vec{r} \cdot \vec{s}$
  - $\vec{r} \times \vec{s}$
  - O ângulo entre  $\vec{r}$  e  $\vec{s}$ .

## RESPOSTAS:

**1.** 1000 m; **2. (a)**  $25 \times 10^6$  reais; **(b)** R\$ 25.000.000,00; **(c)** R\$ 52.083,33; **3.** 20.971.520 palavras; **4.**  $3,16 \times 10^7$  s; **5.** 4.592 s; **6. (a)**  $1,09 \times 10^4$  km; **(b)**  $3,80 \times 10^7$  km<sup>2</sup>; **(c)**  $2,21 \times 10^{10}$  km<sup>3</sup>; **7. (a)** 1479 ft<sup>2</sup>/L; **(b)** 137.369 m<sup>-1</sup>; **8.**  $1,6 \times 10^{-5}$  a.l.; **9.**  $1,4 \times 10^{-9}$  kg. **13.** 24,4 unidades e 7,3 unidades; **14. (a)** (14,1 ; 14,1) cm, **(b)** (0 ; 20) cm, **(c)** (-20 ; 0) cm, **(d)** (-14,1 ; -14,1) cm; **15.**  $|\vec{m}| = 5$  e forma  $-37^\circ$  com o eixo  $x$ ,  $|\vec{n}| = 10$  e forma  $53^\circ$  com o eixo  $x$ ,  $|\vec{m} + \vec{n}| = 11$  e forma  $27^\circ$  com o eixo  $x$  e  $|\vec{m} - \vec{n}| = 11$  e forma  $260^\circ$  com o eixo  $x$ ; **16. (a)** 7,5 unid.<sup>2</sup> **(b)** vetor de módulo 13,0 unid.<sup>2</sup> e sua direção e sentido são dados pela regra da mão direita; **17. (a)** 308, **(b)** Vetor (144 ; -252 ; -176), **(c)**  $\theta \approx 47^\circ$ .

## 2. MOVIMENTO LINEAR EM UMA DIMENSÃO

### 2.1. Introdução

O estudo dos movimentos em geral, quando não se levam em consideração as causas desses movimentos, é chamado de **cinemática**. Ao relacionarmos os movimentos com as forças a eles associadas e com propriedades dos corpos que se deslocam, entramos no campo da **dinâmica**.

Observando, por exemplo, um atleta correndo em uma pista de atletismo: a causa do seu movimento ao longo da pista é a força de impulsão de suas pernas. Entretanto, o seu movimento pode ser estudado sem considerar essa causa, observando-se apenas a posição do atleta em relação ao tempo. Neste capítulo definiremos algumas grandezas cinemáticas e as estudaremos para o caso especial do movimento em uma dimensão. Neste estudo, nos restringiremos a três exigências, que apesar de limitar o uso da teoria envolvida, torna nosso problema mais simples e são úteis em várias situações reais de movimento em física:

- **Movimento em linha reta**  $\Rightarrow$  consideraremos apenas os corpos se movendo em linha reta que pode ser em uma trajetória horizontal ou vertical.
- **Estudo da cinemática**  $\Rightarrow$  Inicialmente não nos preocuparemos com as causas do movimento dos corpos. Simplesmente descreveremos o movimento para situar este corpo quanto a sua posição, velocidade e aceleração em cada instante de tempo.
- **Partícula**  $\Rightarrow$  Todo corpo em movimento pode girar em torno de si próprio ou vibrar em torno de uma posição. Entretanto, se considerarmos que o objeto está realizando uma trajetória muito grande comparado com as suas dimensões, estas complicações podem ser evitadas. Este corpo pequeno será denominado de partícula. Por exemplo, uma gota de chuva ao cair de uma nuvem percorre uma distância grande comparada ao seu tamanho. A Terra em seu movimento ao redor do Sol pode ser considerada como uma partícula, porém para nós que vivemos nela, a Terra não pode ser considerada uma partícula. Matematicamente, uma partícula é tratada como um ponto, um objeto sem dimensões.

### 2.2. Posição, Espaço percorrido e Deslocamento

É de fundamental importância para a matéria que iremos estudar que saibamos diferenciar claramente esses três conceitos. Para isso, em primeiro lugar vamos considerar o caminho como sendo o eixo  $ox$  da superfície horizontal e um corpo em repouso sobre a superfície demarcada. Representamos a posição deste corpo pela função  $x(t)$  que estabelece a posição medida com relação a uma origem (referencial) previamente escolhida em cada instante de tempo.

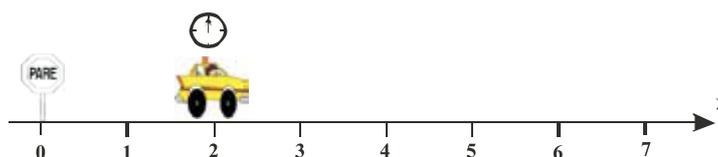


Figura 13: Movimento em linha reta de um carro ao longo do eixo  $Ox$ .

A figura 13 mostra um carro parado (em repouso) na posição  $x = 2 \text{ km}$  e na figura (15a) está a representação da função  $x(t)$  para esse tipo de movimento. Observem que a posição do carro não muda com o passar do tempo. A seguir, suponham que este carro se mova com velocidades, com trechos constantes, até a posição  $x = 7 \text{ km}$  e em seguida retorne para a posição  $x = 5 \text{ km}$  (figura 14). A figura (15b) mostra a função  $x(t)$  para este movimento. Observem que para cada instante de tempo é possível avaliar na função  $x(t)$  a posição do carro.

O espaço percorrido por um corpo é a soma dos valores absolutos de todos os trechos da trajetória desse corpo. Assim, em nosso exemplo, o carro percorreu um primeiro trecho indo da posição  $x = 2 \text{ km}$  até  $x = 7 \text{ km}$  e em seguida retornou  $2 \text{ km}$  até a posição  $x = 5 \text{ km}$ . O espaço percorrido nesse caso foi de  $7 \text{ km}$ .

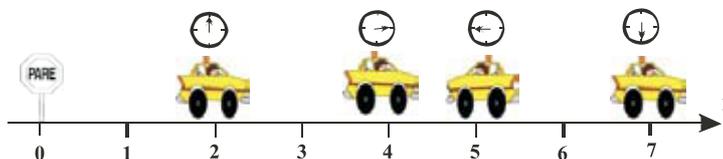


Figura 14: Movimento de carro em linha reta em vários instantes diferentes.

O deslocamento de um corpo,  $\Delta x$ , é variação da posição do corpo:

$$\Delta x = x(t_f) - x(t_i). \quad (14)$$

Onde  $t_f$  e  $t_i$  são o instante final e inicial, respectivamente da trajetória do corpo. Assim, no exemplo anterior, o deslocamento total sofrido pelo carro, desde o instante inicial  $t = 0$  min até  $t = 45$  min foi  $\Delta x = x(45) - x(0) = 5 - 2 = 3 \text{ km}$ .

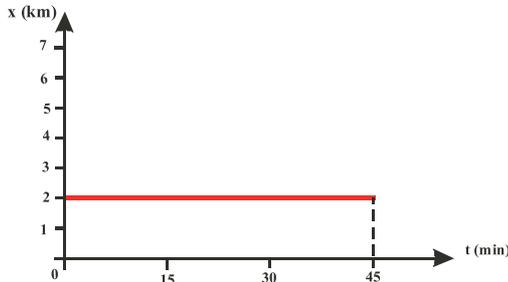


Figura 15-a

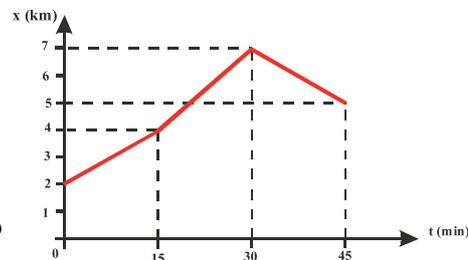


Figura 15-b

Se o deslocamento for um valor positivo ( $\Delta x > 0$ ) dizemos que o corpo se moveu em uma trajetória progressiva ao longo do eixo  $Ox$  previamente definido. Ou seja, a posição final é maior que a posição inicial. Para um observador parado na origem, isso significa dizer que o corpo está “indo”. Se o deslocamento tiver um valor negativo ( $\Delta x < 0$ ), dizemos que o corpo se moveu em uma trajetória retrograda. O corpo está vindo para um observador na origem.

Podemos também representar o deslocamento como o vetor que une a posição inicial  $x(t_i)$  a posição final  $x(t_f)$ , como mostrado na figura 16.

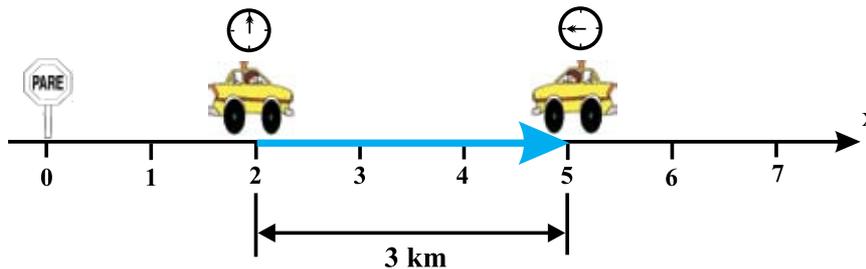


Figura 16

Observação: É necessário chamar a atenção para o fato de que, se o corpo em movimento tiver uma trajetória somente de ida, a posição, o deslocamento e o espaço percorrido por esse corpo coincidem numericamente. Por exemplo, suponham a trajetória do carro do exemplo anterior até o instante  $t = 30$  min. A posição, deslocamento e espaço percorrido foram iguais a 7 km. Além disso, apesar de descrevermos o problema de um automóvel em movimento, o mesmo poderia ser representado como uma partícula em movimento.

### 2.3. Velocidade

No estudo da cinemática, dizemos que a velocidade mede o quão rápido os corpos se movem. Se considerarmos ainda o exemplo do anterior do carro em movimento em linha reta, cuja posição é dada pela função  $x(t)$ , a velocidade é constante e igual a inclinação da reta da figura (15b) em cada trecho da trajetória. No primeiro trecho o carro percorreu 2 km em 15 min. Sua velocidade é então

$$\frac{(2 \text{ km})}{(15 \text{ min})} \text{ ou então } 0,13 \frac{\text{ km}}{\text{ min}}. \quad (15)$$

No segundo trecho, a reta está mais inclinada, logo a velocidade é maior,

$$\frac{(3 \text{ km})}{(15 \text{ min})} \text{ ou } 0,2 \frac{\text{ km}}{\text{ min}}. \quad (16)$$

Porém, se a curva  $x(t)$  não for reta, como na figura 17, definimos a **velocidade média**  $v_m$  da partícula em um intervalo de tempo especificado. Suponham que no instante de tempo  $t_1$ , a partícula esteja na posição  $x_1$ , e no instante de tempo  $t_2$  esta esteja em  $x_2$ . Assim a velocidade média será:

$$v_m = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (17)$$

Onde  $\Delta x$  é o deslocamento sofrido pela partícula no intervalo de tempo  $\Delta t$ .

Neste caso a velocidade média é a inclinação da reta que liga os extremos do intervalo, como na figura 17.

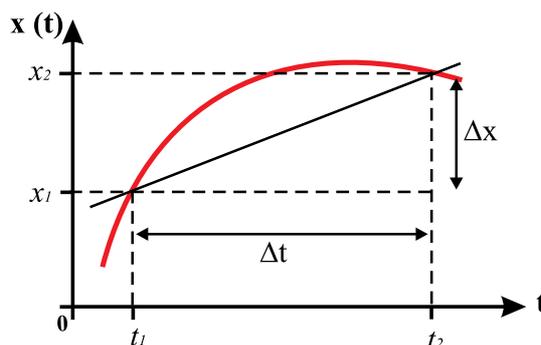


Figura 17: Função  $x(t)$  para a posição  $d$  e uma partícula em função do tempo.

Representamos aqui o valor médio de uma grandeza através de um índice “ $m$ ” ao lado da grandeza considerada. Por exemplo, velocidade média:  $v_m$ . Algumas vezes podemos encontrar alternativamente a representação,  $\langle v \rangle$  ou  $\bar{v}$ . O sinal da velocidade indica o sentido no qual a partícula se movimenta no eixo estabelecido. O sinal de  $\Delta t$  é sempre positivo. Desta forma, quando a velocidade for positiva, indica que o deslocamento também é positivo, logo a partícula se move no sentido do eixo  $Ox$  (movimento progressivo). Caso o sinal da velocidade seja negativo, o sinal do deslocamento também é negativo e a partícula se move no sentido contrário ao eixo  $Ox$  (movimento retrogrado).

Para se calcular a velocidade média tem sempre que se definir um intervalo tempo. Quando a função posição  $x(t)$  é uma curva, a velocidade média varia em intervalos de tempo diferentes. Se considerarmos um intervalo de tempo infinitamente pequeno, ou seja, quando o intervalo de tempo é um instante ( $\Delta t \rightarrow 0$ ), a velocidade média é a velocidade nesse instante. Portanto, neste caso, a velocidade média é a **velocidade instantânea**,  $v$ , onde

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (18)$$

A quantidade a direita da equação acima é o que chamamos de derivada da função  $x$  em relação ao tempo  $t$ . Assim, podemos escrever que a velocidade em um instante é

$$v = \frac{dx}{dt}. \quad (19)$$

Agora quando nos referimos simplesmente à **velocidade**, estaremos nos referindo à velocidade instantânea. No Cálculo, a derivada de uma função representa a inclinação da curva em um determinado ponto. Sendo assim, a velocidade instantânea é a inclinação da posição  $x(t)$  em certo instante de tempo. Essa inclinação (ou velocidade) pode ser negativa. Além disso, quanto maior a inclinação, maior será a velocidade em um instante. Observem na figura 18 as inclinações nos instantes  $t_A$ ,  $t_B$ ,  $t_C$  e  $t_D$ . O valor absoluto das velocidades correspondentes a cada instante em ordem crescente será:

$$v_C < v_B < v_A < v_D. \quad (20)$$

Nesta figura  $v_C$  tem uma inclinação igual a zero, logo a velocidade nesse instante é nula e a velocidade  $v_B$  possui um valor negativo.

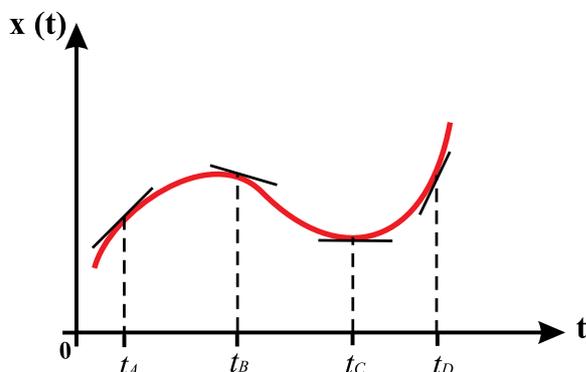


Figura 18: Tangentes a curva da função posição  $\times$  tempo em instantes diferentes.

**OBSERVAÇÃO:** A área sob uma curva da velocidade em função do tempo nos fornece o deslocamento da partícula. Para visualizar esse fato, suponham o exemplo simples de uma partícula com velocidade constante. O gráfico  $v \times t$  da figura 19 mostra que a área sob a curva é o deslocamento sofrido pela partícula.

$$\text{Área} = v(t_2 - t_1) = \Delta x \quad (21)$$

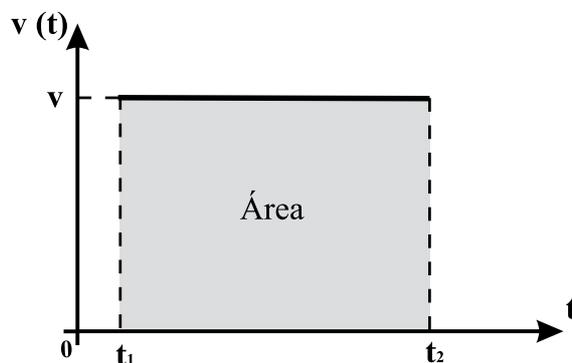


Figura 19: Área sob a curva da função  $v \times t$ .

### EXERCÍCIO RESOLVIDO

Suponham que a função que descreve o movimento de uma partícula em linha reta seja  $x(t) = 3t + 4t^2 + 5$ . Onde  $x$  é dado em metros e  $t$  em segundos. Determinem:

- a posição da partícula nos instantes  $t = 2 \text{ s}$ ,  $t = 8 \text{ s}$ ;
- o espaço percorrido entre os instantes  $t = 2 \text{ s}$  e  $t = 8 \text{ s}$ ;
- a velocidade média no intervalo de  $t = 2 \text{ s}$  até  $t = 8 \text{ s}$ ;
- a equação  $v(t)$  para a velocidade instantânea da partícula;
- a velocidade nos instantes  $t = 2 \text{ s}$  e  $t = 8 \text{ s}$ .

### SOLUÇÃO:

a) Para encontrar a posição, substituímos os valores do tempo na função:

$$x(2) = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 2^2 + 5 = 27 \text{ m.}$$

$$x(8) = 3 \cdot 8 + 4 \cdot 8^2 + 5 = 285 \text{ m.}$$

$$b) \Delta x = x(8) - x(2) = 285 - 27 = 258 \text{ m.}$$

Observem a diferença entre posição e deslocamento.

$$c) v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{258}{6} = 43 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$d) v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(3t + 4t^2 + 5)$$

$$v(t) = 3 + 8t$$

$$e) v(2) = 3 + 8 \cdot 2 = 19 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v(8) = 3 + 8 \cdot 8 = 67 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Vejam que a velocidade média é diferente das velocidades instantâneas calculadas no item (e).

## 2.4. Aceleração

Muitas vezes observamos que no movimento de um corpo, sua velocidade varia, ora em direção, ora em módulo e ora em ambas. Dizemos então que o corpo possui aceleração. A aceleração de uma partícula é uma medida do quanto a velocidade variou com o tempo. Matematicamente, ela é a razão da variação da velocidade com o tempo. Suponhamos que no instante de  $t_1$ , uma partícula tenha uma velocidade  $v_1$  e que no instante  $t_2$ , sua velocidade seja  $v_2$ . Neste caso, a **aceleração média** da partícula será definida de forma semelhante à velocidade média:

$$a_m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (22)$$

Onde  $\Delta v$  é a variação da velocidade e  $\Delta t$  é o intervalo de tempo considerado. Se no intervalo  $\Delta t$  a velocidade não mudar, a aceleração média será nula. A aceleração será variável se  $\Delta v$  mudar em diferentes intervalos do percurso.

Assim como feito com a velocidade, podemos definir a **aceleração instantânea** considerando um intervalo de tempo infinitamente pequeno ( $\Delta t \rightarrow 0$ ). Dessa forma, calcularemos a aceleração em um dado instante:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (23)$$

A aceleração instantânea será então a derivada da velocidade em função do tempo:

$$a = \frac{dv}{dt} \quad (24)$$

O valor da aceleração é expresso em unidades de velocidade por unidades de tempo, como por exemplo, m/s por s ( $\text{m/s}^2$ ),  $\text{cm/s}^2$  e  $\text{km/h}^2$ . De agora em diante quando falarmos simplesmente em aceleração, estamos nos referindo a aceleração instantânea.

A aceleração é diretamente proporcional à variação da velocidade. Assim, como a velocidade é uma grandeza vetorial, a aceleração também o será. No movimento em linha reta, quando a aceleração possuir o mesmo sinal da velocidade inicial, significa dizer que a partícula está acelerada (a velocidade aumenta com o tempo). Em caso contrário, a partícula possui um movimento retardado (a velocidade diminui com o tempo, freando). Podemos observar esse fato na figura 20.

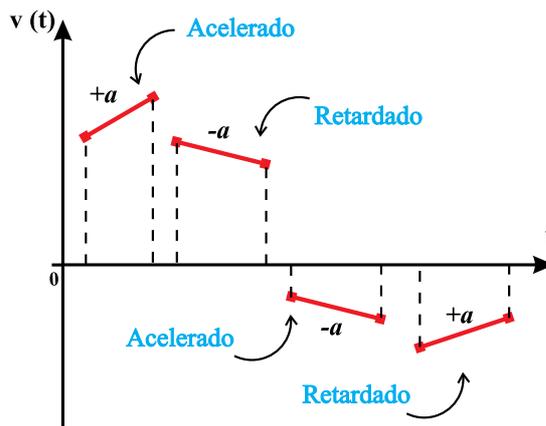


Figura 20: Funções da velocidade X tempo para o movimento de uma partícula em alguns intervalos de tempo.

A figura 20 mostra um gráfico com algumas curvas da velocidade em função do tempo para o movimento de algumas partículas. A inclinação dessas curvas nos indica o sinal da aceleração média das partículas. Comparando os sinais da velocidade inicial com o da aceleração podemos verificar quando os movimentos são acelerados e retardados.



## SAIBA MAIS

A derivada segunda de qualquer função está relacionada com a concavidade da curva. Podemos encontrar a aceleração da partícula a partir da segunda derivada da posição,  $x(t)$ :

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (25)$$

Neste caso, no gráfico da função posição,  $x(t)$ , quando a concavidade for para cima (baixo) a aceleração da partícula é positiva (negativa) e, sendo assim, a velocidade é crescente (decrecente) naquele instante. Em um instante onde a função posição é um ponto de inflexão, a aceleração é nula. Vejam a figura 21: nos instantes A e E, a concavidade da curva está voltada para cima, logo a aceleração é positiva. No instante C, a concavidade está para baixo e a aceleração é negativa. Nos instantes B e D, a curva apresenta um ponto de inflexão, logo a aceleração é nula.

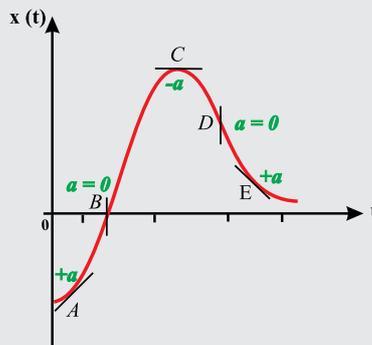


Figura 21: Função posição X tempo de uma partícula em movimento retilíneo.

**EXERCÍCIO RESOLVIDO**

Considerem o exemplo anterior. Determinem:

- a aceleração média no intervalo  $t = 2$  s e  $t = 8$  s;
- a equação da aceleração instantânea  $a(t)$ .

**SOLUÇÃO:**

- Tomando os valores da velocidade calculados no item (e) do exemplo anterior:

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(8) - v(2)}{8 - 2} = \frac{67 - 19}{6} = \frac{48}{6} = 8 \frac{m}{s^2}.$$

- Sendo a equação para a velocidade encontrada no exemplo anterior  $v(t) = 3 + 8t$  a aceleração será:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(3 + 8t)$$

$$a = 8 \frac{m}{s^2}$$

Como era de se esperar, a velocidade aumentou entre os instantes 2 e 8 segundos e portanto, o movimento foi acelerado. Podemos ver que a velocidade inicial da partícula possui o mesmo sinal da aceleração.

**2.5. Movimento Uniformemente Variável – Aceleração constante**

No exemplo anterior, estudamos um movimento onde a partícula apresentava aceleração constante em todo o movimento. Esta é uma situação particular, porém muito observada em física. Nesta seção, estudaremos esses casos onde  $a = \text{constante}$ . Se a aceleração é constante, a aceleração média, para qualquer intervalo, é igual à aceleração instantânea,  $a = a_m$ . Considerando que a velocidade inicial é  $v_0$  no instante inicial é  $t = 0$  e que num instante qualquer  $t$  a velocidade é  $v$ , teremos para a aceleração:

$$a_m = a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - 0} \quad (26)$$

Daí

$$v = v_0 + at \quad (27)$$

Esta equação estabelece a velocidade como uma função linear do tempo,  $v(t)$ , no movimento uniformemente variável. Observem isso na figura 22.

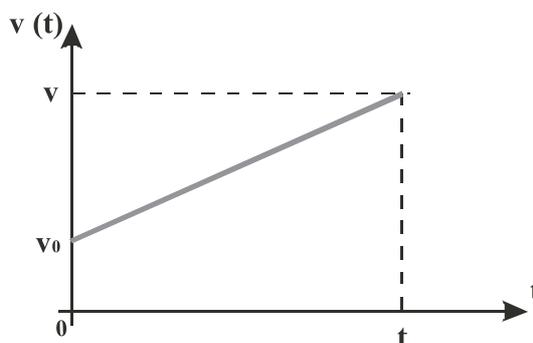


Figura 22: Curva linear da velocidade em função do tempo.

Sabemos que a área sob a curva  $v \times t$  nos fornece o deslocamento da partícula. Assim, através do trapézio da figura 22 encontramos que o deslocamento da partícula no movimento uniformemente variado pode ser dado por

$$\text{Área} = \frac{h}{2}[(B + b)] \quad (28)$$

$$\Delta x = \frac{t}{2}[v + v_0] \quad (29)$$

Usando a equação da velocidade temos:

$$\Delta x = \frac{t}{2}[v_0 + at + v_0]$$

$$x - x_0 = \frac{t}{2}[2v_0 + at]$$

$$x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2 \quad (30)$$

Combinando as equações, podemos eliminar a variável tempo,  $t$ , e encontramos a equação:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \quad (31)$$

Esta equação é conhecida como equação de Torricelli.

Agrupadas na tabela abaixo mostramos o conjunto completo das equações para o movimento ao longo de uma linha reta com aceleração constante. Esse conjunto facilita na hora de resolver problemas. Observem que cada equação apresenta uma variável faltando. Então quando o problema não informar alguma das variáveis vocês podem tomar a equação adequada.

Equação	Variável ausente
$v = v_0 + at$	$x$
$x - x_0 = \frac{t}{2}[v + v]_0$	$a$
$x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$	$v$
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	$t$

TABELA 1

Um caso particular de movimento com aceleração constante é aquele no qual a aceleração é nula,  $a = 0$ . Neste caso, as quatro equações se reduzem a  $v = v_0$  (velocidade não varia) e  $x = x_0 + vt$ .

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

A velocidade de um automóvel, que viaja exatamente para leste, é reduzida uniformemente de 72 km/h para 36 km/h em uma distância de 60 metros.

- Qual a aceleração do automóvel?
- Qual o intervalo de tempo decorrido durante a desaceleração?
- Supondo que o carro continue se retardando na mesma proporção, quanto tempo gastará para chegar ao repouso, a partir da velocidade de 36 km/h?

d) Qual a distância total que o carro percorrerá, a partir da velocidade de 36 km/h, até parar?

### SOLUÇÃO:

a) Escolheremos o sentido oeste-leste como sendo o eixo x. No problema foram dados as velocidades e o deslocamento  $\Delta x$ . Podemos usar então, a equação de Torricelli.

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

$$36^2 = 72^2 + 2a(0,06 - 0)$$

$$a = \frac{36^2 - 72^2}{2 \cdot 0,06} = -3,24 \times 10^4 \text{ km/h}^2$$

Vejam que precisamos converter a unidade do deslocamento de metros para quilômetros: 60 m = 0,06 km. Observem que o carro diminui a velocidade (está freando), e o movimento é retardado. Logo, como esperado, o sinal da aceleração é contrário ao da velocidade inicial.

b) Agora que temos a aceleração, podemos calcular o tempo usando a primeira equação da tabela:

$$v = v_0 + at$$

$$36 = 72 - 3,24 \times 10^4 t$$

$$t = \frac{1}{900} \text{ h}$$

Este mesmo resultado seria encontrado se ao invés da primeira equação, tivéssemos usado qualquer outra da tabela 1. Observem que  $\frac{1}{900} \text{ h} = 4,0 \text{ s}$ .

c) Usando a primeira equação, porém, agora a velocidade final é nula:

$$v = v_0 + at$$

$$0 = 36 - 3,24 \times 10^4 t$$

$$t = \frac{1}{900} \text{ h}$$

Coincidentemente, o tempo gasto para parar foi o mesmo da letra b.

d) Vamos usar agora a terceira equação da tabela:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$x - x_0 = 36 \frac{1}{900} + \frac{1}{2} (-3,24 \times 10^4) \left( \frac{1}{900} \right)^2$$

$$\Delta x = 0,038 \text{ km}$$

Observem que apesar de os intervalos de tempo serem os mesmos nos itens (b) e (c), os deslocamentos são diferentes. No segundo trecho da viagem, o deslocamento foi menor 0,038 km = 38 m, uma vez que as velocidades eram menores nesse trecho.

## 2.6. Queda livre

O exemplo mais comum de movimento com aceleração (aproximadamente) constante é o de um corpo caindo na superfície terrestre. Desprezando a resistência do ar, verifica-se que todos os corpos caem com a mesma aceleração, em um mesmo ponto da superfície terrestre, não importa seu tamanho, seu peso ou sua constituição. Se a altura da queda não for muito grande, a aceleração permanecerá constante durante todo o movimento. Este movimento ideal, sem resistência do ar e sem variação da aceleração é chamado “queda livre”.

A aceleração de um corpo em queda livre é chamada “aceleração da gravidade” e é representada pelo símbolo **g**. Próximo à superfície da Terra seu valor é aproximadamente igual a  $9,8 \text{ m/s}^2$ .

Escolheremos um referencial rigidamente ligado à Terra. Para diferenciar o movimento de queda livre, vertical, do movimento horizontal tomaremos o eixo  $Oy$  como referencial. Iremos considerar neste curso o eixo  $Oy$  com o sentido crescente para cima. Desta forma, nossas equações para o movimento com aceleração constante serão aplicáveis aqui. Para isso, simplesmente trocaremos  $x$  por  $y$  e a aceleração constante  $a$  por  $-g$ . Então, nossas equações ficarão sendo:

Equação	Variável ausente
$v = v_0 - gt$	$y$
$y - y_0 = \frac{t}{2}[v + v]_0$	$g$
$y = y_0 + v_0t - \frac{1}{2}gt^2$	$v$
$v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0)$	$t$

TABELA 2

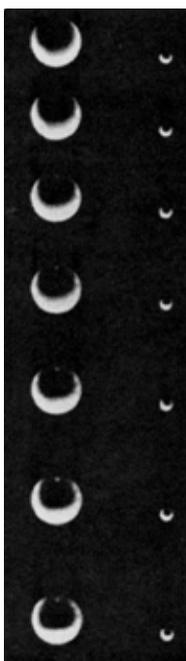


Figura 23: Fotografia tirada com uma lâmpada estroboscópica que registra imagens do objeto em instantes muito próximos. Na foto, temos duas bolas de tamanho diferentes em queda livre próximo à superfície da Terra. As bolas caem alturas iguais para o mesmo intervalo de tempo. A aceleração de ambas é constante e igual a  $g$ .



## SAIBA MAIS

*Em um lançamento vertical para cima, desprezando a resistência do ar, o tempo que a partícula leva para atingir sua altura máxima é igual ao tempo que a partícula leva para retornar a sua posição de partida.*

### EXERCÍCIO RESOLVIDO

Uma criança brincando no terraço de um grande edifício deixa cair sua bola da ponta do parapeito.

- Qual a posição da bola 1,5 s após ter sido largada?
- Com qual velocidade a bola está no instante 1,5 s?
- Se a criança tivesse arremessado a bola para cima, com velocidade inicial de 25 m/s, quanto tempo levaria para esta bola atingir a altura máxima?
- Qual a altura máxima alcançada pela bola?
- Quanto tempo demora até que a bola alcance uma altura igual a 25 m acima do ponto de lançamento?

### SOLUÇÃO:

- Neste problema não foi dada a velocidade, então usaremos a terceira equação da tabela 2. Como a bola foi deixada cair, consideraremos a velocidade inicial nula,  $v_0 = 0$ . Escolheremos o ponto onde a bola foi largada como a origem do eixo  $Oy$ . Substituindo na equação

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y = 0 + 0 \cdot t - \frac{1}{2} 9,8 \times 1,5^2$$

$$y = -11 \text{ m}$$

O sinal negativo indica que a bola está abaixo do ponto onde foi largada.

- Podemos usar agora a primeira equação.

$$v = v_0 - g t$$

$$v = 0 - 9,8 \times 1,5$$

$$v = -15 \text{ m/s}$$

Aqui, o sinal negativo indica que a bola está se movimentando no sentido contrário ao referencial  $Oy$ .

- Em um lançamento vertical para cima, quando o objeto atinge a altura máxima sua velocidade é igual a zero. Podemos utilizar aqui a primeira equação.

$$v = v_0 - g t$$

$$t = \frac{v_0 - v}{g}$$

$$t = \frac{25 - 0}{9,8}$$

$$t = 2,6 \text{ s}$$

d) Vamos usar aqui a quarta equação.

$$v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0)$$

$$0^2 = 25^2 - 2 \times 9,8(y - 0)$$

$$y = \frac{25^2}{2 \times 9,8}$$

$$y = 32 \text{ m}$$

Para encontrar esse resultado poderíamos também ter utilizado a terceira equação.

e) Considerando o ponto de lançamento  $y_0 = 0$ .

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$25 = 0 + 25t - \frac{1}{2} 9,8 t^2$$

$$4,9 t^2 - 25t + 25 = 0$$

Resolvendo esta equação quadrática para t, encontraremos

$$t = 1,4 \text{ s} \quad \text{e} \quad t = 3,7 \text{ s.}$$

Foram encontrados dois valores para o tempo, pois a bola passa pela posição  $y = 25 \text{ m}$  duas vezes. Uma quando está subindo e outra quando está descendo.

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

- Para fazer um mesmo percurso, um carro de potência menor, A, levou o dobro do tempo de outro carro de potência maior, B. Qual a razão entre as velocidades média desses carros?
- Um corredor de maratonas, treinando, percorre 25,0 km da cidade de Ilhéus até Itabuna em 3,5 horas. Cansado, resolve retornar de carro e seu percurso de volta é feito em 27,0 minutos. Tome a origem em Ilhéus e estenda o eixo +Ox até Itabuna. Qual a velocidade média do corredor:
  - No percurso Ilhéus-Itabuna?
  - No percurso Itabuna-Ilhéus?
  - Em todo o percurso de ida e volta?
- Um ciclista desenvolveu uma velocidade média de 3,0 m/s durante 15,0 minutos, a seguir melhorou o desempenho para uma nova velocidade média de 4,0 m/s durante 15,0 minutos. Calcule a sua velocidade média para esse intervalo de 30,0 minutos.
  - Suponha que a velocidade de 3,0 m/s seja mantida durante um deslocamento de 240 m, seguido de uma velocidade média de 4,0 m/s em outro deslocamento de 240 m. Calcule a velocidade média para o deslocamento total.
  - Em qual dos dois casos a velocidade escalar do percurso total é igual à média das duas velocidades escalares?
- O corpo humano pode absorver a um trauma por acidente com aceleração negativa (parada súbita) quando o módulo da aceleração é menor do que  $250,0 \text{ m/s}^2$ . Suponha que você sofra um acidente de automóvel com velocidade de 80,0 km/h e seja amortecido por um airbag que se infla automaticamente. Qual deve ser a distância que o airbag se deforma para que você consiga sobreviver?
- Um automóvel parte do repouso e acelera com uma taxa constante de  $1,30 \text{ m/s}^2$  durante 10,0 s. Em seguida

ele viaja com velocidade constante durante 60,0 s e reduz a velocidade com uma taxa constante de 3,50 m/s<sup>2</sup> até parar. Calcule a distância total percorrida.

6. João lança o seu livro de química verticalmente para cima a partir do telhado de um edifício, a 12 m acima do solo, com uma velocidade inicial de 10,0 m/s. Despreze a resistência do ar.
- Calcule o tempo que o livro leva para atingir o solo desde o momento em que ele foi lançado,
  - Determine o módulo e o sentido da aceleração média do livro,
  - Determine o módulo e o sentido da velocidade média do livro,
  - Qual a velocidade do livro quando ele atinge o solo?
7. Um bolo foi deixado para esfriar no peitoril de uma janela e uma criança, brincando, esbarra no bolo fazendo-o cair. O bolo atravessa a janela de baixo, cuja altura é 1,90 m, em 0,420 s. Despreze a resistência do ar. Qual é a distância entre o topo dessa janela e o peitoril de onde o bolo caiu?
8. Dois carros, A e B, se deslocam ao longo de uma linha reta. A distância de A ao ponto inicial é dada em função do tempo por  $x_A = \alpha t + \beta t^2$ , onde  $\alpha = 2,60$  m/s e  $\beta = 1,20$  m/s<sup>2</sup>. A distância de B ao ponto inicial é dada em função do tempo por  $x_B = \delta t^2 - \epsilon t^3$ , onde  $\delta = 2,80$  m/s<sup>2</sup> e  $\epsilon = 0,20$  m/s<sup>3</sup>.
- Qual carro está na frente logo que eles saem do ponto inicial?
  - Em que instante(s) os carros estão no mesmo ponto?
  - Em que instante(s) a distância entre os carros A e B não aumenta e nem diminui?

Em que instante(s) os carros A e B possuem a mesma aceleração?

## RESPOSTAS

1.  $v_A/v_B = 0,5$ ; 2. (a) 7,1 km/h, (b) 54 km/h, (c) 12 km/h; 3. (a) 3,5 m/s, (b) 3,4 m/s, (c) letra a; 4. 1,0 m; 5. 869,14 m; 6. (a) 8,3 s, (b) 9,8 m/s<sup>2</sup> para baixo, (c) 1,4 m/s para baixo, (d) 69,3 m/s para baixo; 7. 0,1 m; 8. (a) A, (b) 5,73 s e 2,27 s, (c) 1,00 s e 4,33 s, (d) 2,67 s.

### 3. MOVIMENTO EM DUAS E TRÊS DIMENSÕES

#### 3.1. Introdução

A maioria dos movimentos de partículas não está restrita a um percurso em linha reta. Muitos deles podem estar em duas ou três dimensões. Quando analisamos o percurso de um automóvel de uma cidade para outra, por exemplo, verificamos que este não é uma linha reta, pois seu caminho é composto de curvas.

Para estudarmos movimentos de partículas em mais de uma dimensão necessitamos de um vetor. Veremos como descrever a posição, a velocidade e a aceleração das partículas.

#### 3.2. Vetor Posição

Para representar a posição de uma partícula em três dimensões podemos estabelecer três eixos cartesianos  $x$ ,  $y$  e  $z$  como um referencial fixo. Neste referencial, a posição da partícula será o vetor  $\vec{r}$  desde a origem até o local onde se encontra a partícula, conforme mostra a figura 24,

$$\vec{r} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}. \quad (32)$$

Onde  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$  e  $\vec{z}$  são vetores componentes do vetor  $\vec{r}$ . O módulo do vetor posição será

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (33)$$

Se o movimento da partícula for restrito a um plano, podemos desprezar a componente  $\vec{z}$ .

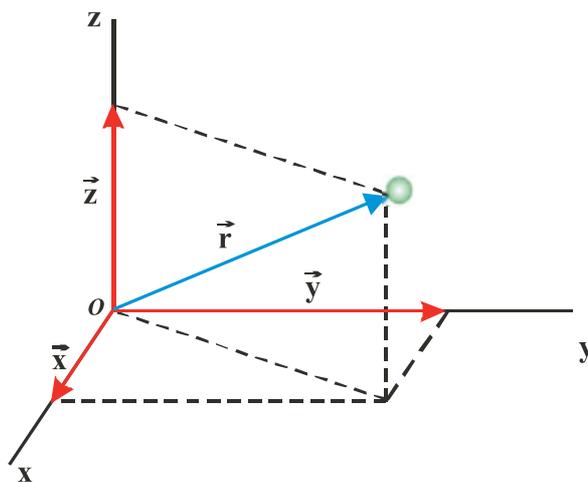


Figura 24: Vetor posição de uma partícula.

Assim como no caso unidimensional, o deslocamento será a diferença de posição entre dois instantes diferentes. Suponham que na trajetória da partícula mostrada na figura 24, na curva em vermelho, nos instantes  $t_1$  e  $t_2$ , as posições da partícula sejam  $\vec{r}(t_1)$  e  $\vec{r}(t_2)$ , respectivamente. Neste caso, o deslocamento sofrido pela partícula será

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) \quad (34)$$

Como  $\vec{r}(t_1)$  e  $\vec{r}(t_2)$  são vetores, o deslocamento  $\Delta\vec{r}$  também será um vetor. Observem na figura 24 que a direção e o sentido desse vetor obedecem as regras de adição vetorial.

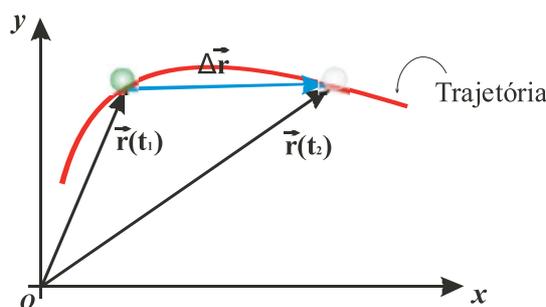


Figura 25: Trajetória de uma partícula no plano  $xy$ .

### 3.3. Velocidade Vetorial

No espaço tridimensional, assim como a posição, a velocidade será representada por um vetor. Como tal, ela deve apresentar módulo, direção e sentido. O vetor **velocidade média**,  $\vec{v}_m$ , será definido a partir do deslocamento da partícula em um intervalo de tempo:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (35)$$

Observem na definição que  $\Delta \vec{r}$  é o vetor deslocamento e  $\Delta t$  é um número escalar. Logo o vetor velocidade média  $\vec{v}_m$  deverá ter a mesma direção e sentido do deslocamento  $\Delta \vec{r}$ . Se considerarmos o deslocamento mostrado na figura 25, o vetor velocidade terá o mesmo sentido do vetor  $\Delta \vec{r}$  mostrado em azul.

A **velocidade instantânea** será definida da mesma forma que no movimento unidimensional. Ela é a derivada da posição em função do tempo. Sendo aqui a posição um vetor representado por  $\vec{r}$ , a velocidade instantânea será o vetor

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (36)$$

Onde  $d\vec{r}$  é uma variação infinitesimal do vetor posição ocorrida no intervalo de tempo infinitesimal,  $dt$ . Esta variação pode ser simplesmente uma mudança no módulo da posição, na direção da posição ou em ambos: módulo e direção.

Sendo agora a velocidade um vetor, podemos representá-lo usando seus vetores componentes da seguinte forma:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z \quad (37)$$

onde

$$\vec{v}_x = \frac{d\vec{x}}{dt}, \quad \vec{v}_y = \frac{d\vec{y}}{dt} \quad \text{e} \quad \vec{v}_z = \frac{d\vec{z}}{dt} \quad (38)$$

são os componentes ao longo dos eixos cartesianos  $x, y$  e  $z$ .

Observando a figura 25, vemos que a medida que o intervalo de tempo  $\Delta t = t_2 - t_1$  diminui tendendo ao diferencial  $dt$ , o deslocamento  $\Delta \vec{r}$  diminui para o diferencial  $d\vec{r}$ . Assim,  $d\vec{r}$  será um vetor tangente à trajetória no instante  $t_1$  e por definição a velocidade instantânea também. Logo, como vemos na figura 26, em cada instante o vetor velocidade,  $\vec{v}$ , apontará na direção tangente à trajetória naquele ponto e o sentido será o da própria trajetória.

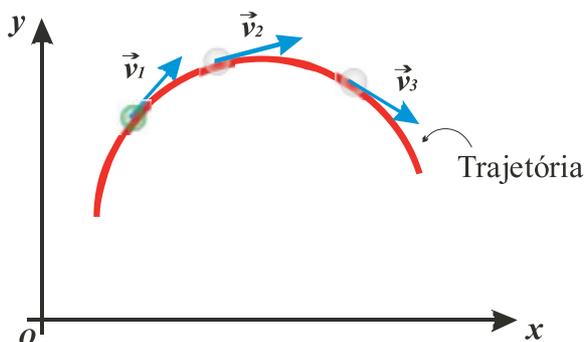


Figura 26: Vetores velocidade de uma partícula em três instantes diferentes da trajetória.

### 3.4. Vetor Aceleração

Em três dimensões, a aceleração será um vetor dado pela relação

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (39)$$

Esta equação nos diz que se a velocidade da partícula sofrer qualquer variação de velocidade seja em módulo, direção ou em ambos, a partícula terá aceleração. Podemos decompor esta aceleração em seus componentes vetoriais:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d}{dt} (\vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z) \\ \vec{a} &= \frac{d\vec{v}_x}{dt} + \frac{d\vec{v}_y}{dt} + \frac{d\vec{v}_z}{dt} \\ \vec{a} &= \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z \end{aligned} \quad (40)$$

Onde

$$\vec{a}_x = \frac{d\vec{v}_x}{dt}, \quad \vec{a}_y = \frac{d\vec{v}_y}{dt} \quad \text{e} \quad \vec{a}_z = \frac{d\vec{v}_z}{dt} \quad (41)$$

Quando uma partícula realiza uma curva, o vetor aceleração aponta para dentro desta curva. Se a trajetória da partícula for uma reta, a direção do vetor aceleração será paralela a esta.

### EXERCÍCIO RESOLVIDO

(Sears & Zemansky) Vocês estão operando um modelo de um carro com controle remoto em um campo de tênis vazio. A posição de vocês é a origem do sistema de coordenadas, e a superfície do campo é o plano xy. O carro, que será representado por um ponto, possui componentes x e y que variam com o tempo de acordo com

$$\begin{aligned} x &= 2,0 - (0,25)t^2, \\ y &= 1,0t + (0,025)t^3. \end{aligned}$$

Onde x é dado em metros e t em segundos.

- Calculem as coordenadas do carro e a distância entre vocês e ele no instante  $t = 2,0$  s.
- Calculem o vetor deslocamento e o vetor velocidade média no intervalo de tempo entre  $t = 0,0$  s e  $t = 2,0$  s.
- Deduzam uma expressão geral para o vetor velocidade instantânea do carro e encontrem a velocidade para  $t = 2,0$  s. Expressem a velocidade usando suas componentes e também em termos do módulo, direção e sentido.

- d) Calculem os componentes do vetor aceleração média no intervalo de tempo entre  $t = 0,0$  s e  $t = 2,0$  s.  
 e) Achem a aceleração instantânea em  $t = 2$  s.

**SOLUÇÃO:**

a) no instante  $t = 2,0$  s as coordenadas serão

$$x_1 = 2,0 - (0,25) \times 2^2 = 1,0 \text{ m}$$

$$y_1 = 1,0 \times 2 + (0,025) \times 2^3 = 2,2 \text{ m}$$

A distância entre o carro e a origem é

$$r = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{1,0^2 + 2,2^2} = 2,4 \text{ m}$$

b) Para achar o deslocamento e a velocidade média escreveremos as posições  $\vec{r}_0$  e  $\vec{r}_1$  nos instantes  $t = 0,0$  s dado no enunciado e  $t = 2,0$  s calculado no item (a).

$$\vec{r}_0 = \vec{x}_0 + \vec{y}_0 \equiv (x_0; y_0)$$

Onde

$$x_0 = 2,0 - 0,25 \times 0^2 = 2,0 \text{ m} \quad \text{e} \quad y_0 = 1,0 \times 0,0 + (0,025) \times 0,0^3 = 0,0 \text{ m}$$

$$\vec{r}_0 = (2,0; 0,0)$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{1x} + \vec{r}_{1y} \equiv (r_{1x}; r_{1y})$$

$$\vec{r}_1 = (1,0; 2,2)$$

Portanto o deslocamento será

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0 = (1,0; 2,2) - (2,0; 0,0)$$

$$\Delta\vec{r} = (-1,0; 2,2).$$

Para calcular a velocidade média, dividimos o deslocamento pelo intervalo de tempo,

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{(-1,0; 2,2)}{2,0}$$

$$\vec{v}_m = (-0,5; 1,1)$$

Os componentes da velocidade média são

$$(v_m)_x = -0,5 \text{ m/s} \quad \text{e} \quad (v_m)_y = 1,1 \text{ m/s}$$

c) De acordo com a equação (38) o módulo das componentes da velocidade instantânea é

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(2,0 - 0,25t^2) = -0,5t$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(1,0t + 0,025t^3) = 1,0 + 0,075t^2$$

$$\vec{v} = (v_x; v_y) = ((-0,5t); (1,0 + 0,075t^2))$$

$$v_x = -0,5 \times 2,0 = -1,0 \text{ m/s}$$

No instante  $t = 2,0 \text{ s}$

$$v_x = -0,5 \times 2,0 = -1,0 \text{ m/s}$$

$$v_y = 1,0 + 0,075 \times 2,0^2 = 1,3 \text{ m/s}$$

$$\vec{v} = (-1,0; 1,3) \text{ m/s}$$

Observem que a velocidade média encontrada no item (b) é diferente da velocidade instantânea. Representando este resultado em termos de módulo

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-1,0)^2 + 1,3^2} = 1,6 \text{ m/s}$$

A direção do vetor velocidade em relação ao eixo  $Ox$  é dada pelo ângulo  $\theta$ , que é

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{1,3}{-1,0} = -1,3, \text{ Assim } \theta = 128^\circ.$$

Suas calculadoras informarão que a função inversa da tangente de  $-1,3$  é  $-52^\circ$ . Porém, vocês devem analisar o gráfico do vetor para decidir sua direção e seu sentido. Observando as componentes da velocidade, vemos que o vetor aponta para o segundo quadrante, logo o ângulo deve ser  $-52^\circ + 180^\circ = 128^\circ$ .

d) Usaremos a equação para a velocidade instantânea encontrada no item (c) para achar as velocidades  $\vec{v}_0$  e  $\vec{v}_1$  nos instantes  $t = 0,0 \text{ s}$  e  $t = 2,0 \text{ s}$ .

$$\vec{v}_0 = (v_{0x}; v_{0y}) = ((-0,5 \times 0,0); (1,0 + 0,075 \times 0,0^2)) = (0,0; 1,0) \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_1 = (v_{1x}; v_{1y}) = ((-0,5 \times 2,0); (1,0 + 0,075 \times 2,0^2)) = (-1,0; 1,3) \text{ m/s}$$

Daí a aceleração média será

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}_0}{\Delta t}$$

$$\vec{a}_m = \frac{(-1,0; 1,3) - (0,0; 1,0)}{2,0} = \frac{(-1,0; 0,3)}{2,0} = (-0,5; 0,15) \text{ m/s}^2.$$

e) Através da equação (41) e do resultado do item (c) vemos que o módulo das componentes da aceleração instantânea é

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(-0,5t) = -0,5 \text{ m/s}^2,$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}(1,0 + 0,075t^2) = 0,15t \text{ m/s}^2$$

Daí

$$\vec{a} = ((-0,5); (0,15t)) \text{ m/s}^2$$

No instante  $t = 2,0 \text{ s}$  a aceleração é

$$\vec{a} = ((-0,5); (0,15 \times 2,0)) = (-0,5; 0,3) \text{ m/s}^2$$

onde

$$a_x = -0,5 \text{ m/s}^2 \quad \text{e} \quad a_y = 0,3 \text{ m/s}^2.$$

Representando em termos de módulo, a aceleração é

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-0,5)^2 + 0,3^2} = 0,58 \text{ m/s}^2$$

A direção do vetor aceleração instantânea medida em relação ao eixo Ox é dado pelo ângulo  $\alpha$ , onde

$$\tan \alpha = \frac{a_y}{a_x} = \frac{0,3}{-0,5} = -0,6$$

$$\alpha = 149^\circ$$

Observem que o vetor aceleração está no segundo quadrante, por isso o ângulo foi  $180^\circ - 31^\circ = 149^\circ$ . Além disso, observem que o vetor aceleração não tem a mesma direção da velocidade naquele instante. Tentem analisar como é a trajetória do carro nesse exemplo, visualizando sua velocidade e aceleração em cada instante.

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

- Um balanço descreve um arco de círculo em cada oscilação. Qual são a direção e o sentido da velocidade e da aceleração, instantâneas, nas extremidades da oscilação? E no ponto médio? Faça uma figura representando esses vetores.
- Os vetores  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$  mostrados na figura deste problema têm módulos iguais a 20,0 m/s e 10 m/s, respectivamente. Eles representam a velocidade instantânea de um corpo nos instantes  $t_1 = 10$  s e  $t_2 = 15$  s.
  - Calcule e desenhe em outra figura as componentes  $\vec{v}_{1x}$  e  $\vec{v}_{1y}$  desse vetor.
  - Faça o mesmo para o vetor  $\vec{v}_2$ .
  - Calcule e represente em uma figura o módulo, direção e o sentido do vetor aceleração média sofrida por este corpo no intervalo de tempo considerado.
- Um pirata se move em um plano xy numa praia tentando localizar um tesouro. As coordenadas do pirata em função do tempo são  $x(t) = \alpha t$  e  $y(t) = 20,0 - \beta t^2$ , onde x é dado em metros, t em segundos,  $\alpha = 2,4$  m/s e  $\beta = 0,7$  m/s<sup>2</sup>. Embora o pirata não saiba, o tesouro está na origem.
  - Em que instantes a velocidade do pirata é perpendicular à sua aceleração?
  - Em quais instantes a velocidade do pirata não varia instantaneamente?
  - Em quais instantes a velocidade do pirata é perpendicular ao seu vetor posição? Onde se encontra o pirata nesses instantes?
  - Qual a distância mínima entre o tesouro e o pirata? Em que instante essa distância mínima é atingida?
  - Faça um desenho da trajetória do infeliz pirata.
- As componentes da velocidade de uma partícula movendo-se no plano xy são dadas por  $\vec{v}_x = 6t - 4t^2$  e  $\vec{v}_y = 8$ . Sendo a velocidade dada em m/s e o tempo ( $t > 0$ ) em segundos.
  - Qual a aceleração quando  $t = 3$  s?
  - Quando (se for o caso) a aceleração será nula?
  - Quando (se for o caso) o módulo da velocidade será 10 m/s?

### 3.5. Movimento em Mais de uma Dimensão com Aceleração Constante

Suponham um movimento no espaço tridimensional com aceleração constante. Neste caso, a aceleração não muda de módulo ou direção enquanto a partícula se move. Isto significa dizer que as componentes do vetor aceleração,  $\vec{a}_x$ ,  $\vec{a}_y$  e  $\vec{a}_z$  também são constantes. Mesmo que a partícula descreva trajetórias curvilíneas, este movimento pode ser estudado como uma superposição de três movimentos perpendiculares entre si e em linha reta com aceleração constante. Para isso, podemos adaptar as equações do movimento uniformemente variado (movimento com aceleração constante) mostradas na tabela 1 do capítulo 2. O conjunto dessas equações adaptadas se tornará:

Direção x	Direção y	Direção z
$v_x = v_{0x} + a_x t$	$v_y = v_{0y} + a_y t$	$v_z = v_{0z} + a_z t$
$x - x_0 = \frac{t}{2} [v_x + v_{0x}]$	$y - y_0 = \frac{t}{2} [v_{yx} + v_{0y}]$	$z - z_0 = \frac{t}{2} [v_z + v_{0z}]$
$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$	$y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2$	$z = z_0 + v_{0z} t + \frac{1}{2} a_z t^2$
$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$	$v_y^2 = v_{0y}^2 + 2a_y(y - y_0)$	$v_z^2 = v_{0z}^2 + 2a_z(z - z_0)$

Tabela 3

Nesta tabela utilizamos os índices x, y e z para nos lembrar que estamos trabalhando com as componentes das grandezas vetoriais: posição, velocidade e aceleração.

### 3.6. Lançamento de Projéteis

Um exemplo de movimento em mais de uma dimensão com aceleração constante é o movimento de projéteis. Este é um movimento sem atrito em duas dimensões de uma partícula lançada obliquamente no ar, por exemplo, o lançamento de uma bola de futebol, o tiro de um canhão e outros desconsiderando a resistência do ar.

Este tipo de movimento está sujeito apenas à aceleração constante da gravidade,  $\vec{g}$ , dirigida verticalmente para baixo. Então vamos considerar nosso referencial no plano xy tomando a direção horizontal no eixo Ox e a direção vertical no eixo Oy. Dessa forma, o vetor aceleração constante tem apenas a componente vertical  $\vec{a} = \vec{a}_y = -\vec{g}$ , a componente horizontal é nula  $\vec{a}_x = 0$ . O sinal negativo no vetor aceleração da gravidade indica que ele é contrário ao eixo Oy, como mostrado na figura 27.

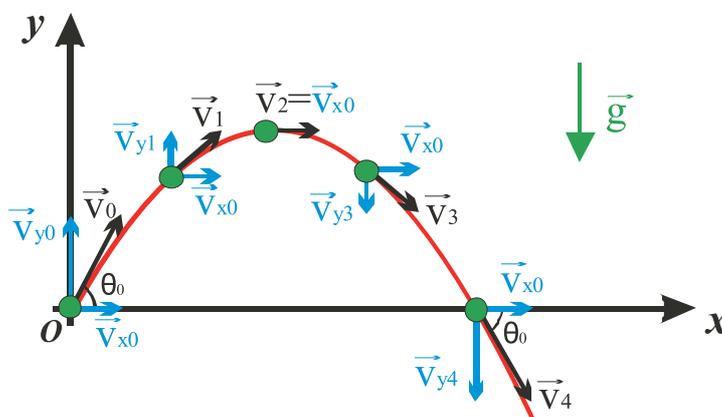


Figura 27: Trajetória de um projétil lançado da origem com velocidade inicial  $v_0$  formando um ângulo  $\theta_0$  com o eixo x.

Suponham que lancemos um projétil a partir da origem dos eixos escolhidos com uma velocidade inicial,  $\vec{v}_0 = \vec{v}_{x0} + \vec{v}_{y0}$ . A posição inicial desse projétil é  $\vec{r}_0 = \vec{x}_0 + \vec{y}_0$ , onde  $x_0 = 0$  e  $y_0 = 0$  no instante  $t = 0$ . Vejam na figura 27 a trajetória do projétil. Sendo  $\theta_0$  o ângulo formado entre a velocidade inicial e o eixo horizontal  $Ox$ , então

$$v_{x0} = v_0 \cos\theta_0 \quad \text{e} \quad v_{y0} = v_0 \text{sen}\theta_0 \quad (42)$$

Apesar do movimento curvilíneo estudaremos a trajetória da partícula separando a direção horizontal da direção vertical. Como a componente horizontal da aceleração da partícula é nula,  $\vec{a}_x = 0$ , o movimento horizontal terá velocidade constante. Ou seja

$$v_x = v_{x0} + a_x t = v_{x0} = v_0 \cos\theta_0 \quad (43)$$

isto é, a componente horizontal da velocidade não muda.

A componente vertical do movimento se comporta como um lançamento vertical para cima com velocidade inicial  $\vec{v}_{y0}$ , onde

$$a_y = -g \quad \text{e} \quad v_{y0} = v_0 \text{sen}\theta_0 \quad (44)$$

e a velocidade da partícula será dada pela equação

$$\begin{aligned} v_y &= v_{y0} + a_y t \\ v_y &= v_0 \text{sen}\theta - gt \end{aligned} \quad (45)$$

Observem que esta equação é idêntica àquela usada em queda livre. Na figura 27 visualizamos as componentes da velocidade em vários instantes do movimento. Observem que, enquanto a componente horizontal permanece constante, a componente vertical vai diminuindo seu tamanho até tornar-se nula no ponto mais alto. A partir daí,  $\vec{v}_y$ , inverte de sentido e passa a crescer enquanto o projétil vai caindo. Quando o projétil se encontra novamente na mesma altura do ponto de lançamento, a componente  $y$  da velocidade terá o mesmo módulo da componente inicial,  $v_{y4} = v_{y0}$ . Logo, a velocidade no instante 4 da figura 27 tem o mesmo módulo da velocidade inicial e o mesmo ângulo formado com o eixo  $Ox$ .

O módulo do vetor velocidade resultante em qualquer instante é  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$  e o ângulo que ele forma

com a horizontal em cada instante é dado por  $\tan\theta = \frac{v_y}{v_x}$ . O vetor velocidade será sempre tangente à trajetória da partícula em cada ponto.

Para determinarmos a posição do projétil em cada ponto escreveremos suas componentes  $x$  e  $y$ . Considerando sua posição inicial na origem e as equações (42 e 44) obtemos:

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 = (v_0 \cos\theta_0)t \quad (46)$$

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = (v_0 \text{sen}\theta)t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (47)$$

Se combinarmos as equações (46 e 47) e eliminarmos a variável tempo nelas, encontraremos a equação da trajetória do projétil. Esta é uma equação da coordenada  $y$  em função da coordenada  $x$ :

$$y = (\tan\theta_0)x - \frac{g}{2(v_0 \cos\theta_0)^2}x^2. \quad (48)$$

Observem que  $\theta_0$ ,  $v_0$  e  $g$  são constantes e, além disso, a equação anterior é uma função quadrática na variável  $x$ . Logo a trajetória do projétil é uma parábola, como descrito na figura 27.



Figura 28: (www.vivercidades.org.br) Trajetória parabólica das larvas de uma erupção vulcânica.

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

Um jogador de futebol chuta uma bola com velocidade inicial de 20 m/s formando um ângulo de  $30^\circ$  com a horizontal.

- Determinem o instante em que a bola atinge o ponto mais alto de sua trajetória e qual a altura atingida por ela.
- Qual o alcance horizontal,  $R$ , da bola e quanto tempo ela permanece no ar?
- Qual a velocidade da bola no instante em que ela atinge de volta o solo?

### SOLUÇÃO:

- Quando a bola atinge o ponto mais alto de sua trajetória, a componente  $y$  de sua velocidade é nula. Assim, usando a equação 45 temos

$$v_y = v_0 \cdot \text{sen}\theta - gt$$

$$0 = 20 \cdot \text{sen}30^\circ - 9,8t_1$$

$$t_1 = \frac{20 \cdot \text{sen}30^\circ}{9,8} = 1,02 \text{ s}$$

Usando esse tempo de subida  $t_1$  na equação (47) encontramos a altura máxima do projétil:

$$y = (v_0 \cdot \text{sen}\theta) \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$h_{\text{max}} = (20 \cdot \text{sen}30^\circ) \cdot 1,02 - \frac{1}{2}9,8 \cdot (1,02)^2 = 5,10 \text{ m}$$

- O alcance horizontal,  $R$ , do projétil é a distância medida a partir do ponto de lançamento que consideramos como sendo a origem. Se fizermos  $y = 0$  na equação (47) encontramos o tempo  $t_2$  que bola alcança o ponto  $R$ :

$$y = (v_0 \cdot \text{sen}\theta) \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$0 = (20 \cdot \text{sen}30^\circ) \cdot t_2 - \frac{1}{2}9,8 \cdot t_2^2$$

Uma solução para esta equação é a solução trivial  $t_2 = 0$ . Ela corresponde ao instante de partida da bola da origem. Estamos interessados na outra solução que será dada por

$$0 = (20 \cdot \text{sen} 30^\circ) - \frac{1}{2} 9,8 t_2$$

$$t_2 = \frac{2 \times 20 \cdot \text{sen} 30^\circ}{9,8} = 2,04 \text{ s}$$

Observem que  $t_2 = 2t_1$ , isto é, o tempo necessário para a bola subir é igual ao tempo necessário para ela descer. Substituindo o tempo que a bola permanece no ar na equação (46) encontramos o alcance

$$x = (v_0 \cos \theta_0) t$$

$$R = (20 \cdot \cos 30^\circ) \cdot 2,04 = 35,33 \text{ m}$$

d) As equações (43 e 45) nos permitem calcular as componentes da velocidade:

$$v_x = v_0 \cos \theta = 20 \cdot \cos 30^\circ = 17,32 \text{ m/s}$$

$$v_y = v_0 \text{sen} \theta - gt = 20 \cdot \text{sen} 30^\circ - 9,8 \times 2,04 = -10 \text{ m/s}$$

Como esperado, a componente vertical da velocidade é negativa, pois  $\vec{v}_y$ , neste instante, aponta na direção contrária ao eixo  $Oy$ . O módulo da velocidade será

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$v = \sqrt{17,32^2 + 10^2} = 20,0 \text{ m/s}$$

Observem que a velocidade neste ponto tem o mesmo módulo da velocidade inicial  $v_0$  e sua direção é

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x}$$

$$\tan \theta = \frac{-10}{17,32} = 0,58$$

$$\theta = -30^\circ$$

A direção da velocidade forma um ângulo de  $30^\circ$  contado no sentido horário a partir do eixo  $Ox$ . Notem que o ângulo é semelhante ao ângulo inicial, devido à simetria da trajetória.

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

- Uma bola de pingue-pongue rola sobre uma mesa com velocidade constante de 2,0 m/s. Após sair da mesa, cai, atingindo o chão a uma distância de 0,80 m dos pés da mesa. Adote  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ , despreze a resistência do ar e determine:
  - A altura da mesa.
  - O tempo gasto para atingir o solo.
- Calcular o alcance de um projétil lançado por um morteiro com velocidade inicial de 100 m/s, sabendo-se que o ângulo formado entre o morteiro e a horizontal é de  $30^\circ$ . Adotar  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .

7. Um objeto voa numa trajetória retilínea, com velocidade  $v = 200 \text{ m/s}$ , numa altura  $H = 1500 \text{ m}$  do solo. Quando o objeto passa exatamente na vertical de uma peça de artilharia, esta dispara um projétil, num ângulo de  $60^\circ$  com a horizontal. O projétil atinge o objeto decorrido o intervalo de tempo  $\Delta t$ . Adotar  $g = 10 \text{ m/s}^2$ . Calcular a velocidade de lançamento do projétil.
8. Um avião precisa soltar um saco com mantimentos a um grupo de sobreviventes que está numa balsa. A velocidade horizontal do avião é constante e igual a  $100 \text{ m/s}$  com relação à balsa e sua altitude são  $2000 \text{ m}$ . Qual a distância horizontal que separa o avião dos sobreviventes, no instante do lançamento ? ( $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ ).
9. Para bombardear um alvo, um avião em vôo horizontal a uma altitude de  $2,0 \text{ km}$  solta a bomba quando a sua distância horizontal até o alvo é de  $4,0 \text{ km}$ . Admite-se que a resistência do ar seja desprezível. Para atingir o mesmo alvo, se o avião voasse com a mesma velocidade, mas agora a uma altitude de apenas  $0,50 \text{ km}$ , ele teria que soltar a bomba a que distância horizontal do alvo?

### 3.7. Movimento Circular Uniforme - MCU

O movimento de uma partícula em uma circunferência, com módulo da velocidade constante, é denominado movimento circular uniforme. Neste tipo de movimento o vetor velocidade varia continuamente apenas em direção. Sendo assim, veremos que a aceleração também possui módulo constante.

Para analisar esta aceleração, vejam a figura 29a de uma partícula descrevendo MCU. Considerem que o centro da circunferência corresponde à origem dos eixos cartesianos. Suponham dois instantes do movimento, um com a partícula no ponto  $P_1$  e outro com a partícula no ponto  $P_2$ . Os vetores posições correspondentes a esses pontos possuem o mesmo módulo,  $r$ , e suas velocidades são  $\vec{v}_1$  e  $\vec{v}_2$ .

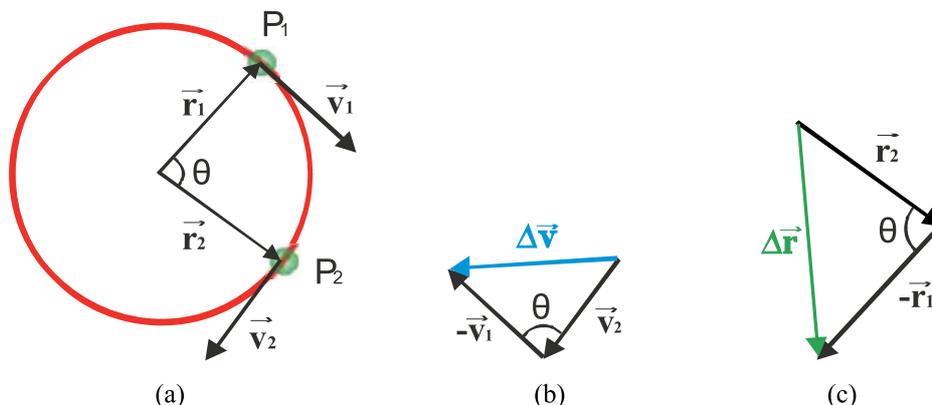


Figura 29: Partícula descrevendo movimento circular uniforme. São assinaladas as velocidades em dois pontos diferentes,  $P_1$  e  $P_2$ .

Os vetores velocidades são iguais em módulo,  $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$ , já que o movimento é uniforme, mas diferem de direção. Na figura 29b traçamos estes vetores de modo a encontrar a variação da velocidade sofrida pela partícula,  $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ . Observem que o vetor  $\Delta\vec{v}$ , quando colocado no meio do trajeto de  $P_1$  a  $P_2$ , aponta para dentro da circunferência.

Na figura 29c, traçamos a variação da posição,  $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ . Sendo a velocidade do movimento constante, o módulo do deslocamento é então dado por  $\Delta r = v\Delta t$ .

Os triângulos formados por:  $\vec{v}_1$ ,  $\vec{v}_2$  e  $\Delta\vec{v}$  na figura 29b e por  $\vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_2$  e  $\Delta\vec{r}$  na figura 28c são triângulos isósceles e, além disso, são semelhantes. Isto é verdade uma vez que ambos apresentam dois lados e dois ângulos iguais (isósceles). Além disso, sendo o vetor velocidade em cada ponto perpendicular ao correspondente vetor posição, o ângulo interno formado entre  $\vec{v}_1$  e  $\Delta\vec{v}$  e o ângulo formado entre  $\vec{r}_1$  e  $\Delta\vec{r}$ , são iguais. Sendo os dois triângulos semelhantes, é válida a relação entre os módulos dos seus lados

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta r}{r} \quad \frac{\Delta v}{v} = \frac{v \Delta t}{r} \quad (49)$$

Desta relação segue-se que a aceleração média da partícula é

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v^2}{r} \quad (50)$$

No limite em que o intervalo de tempo tende a zero,  $\Delta t \rightarrow 0$ , a aceleração média torna-se

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad a = \frac{v^2}{r} \quad (51)$$

Onde  $a$  é o módulo da aceleração instantânea da partícula em MCU e  $r$  é o raio da circunferência.

Resta-nos agora analisar a direção e sentido da aceleração instantânea. Sendo  $\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ , a direção de  $\vec{a}_m$  é a mesma direção de  $\Delta \vec{v}$ . Como vimos anteriormente na figura 29b,  $\Delta \vec{v}$  e consequentemente  $\vec{a}_m$  apontam para dentro da circunferência. Quando tomamos um intervalo de tempo infinitesimal,  $\Delta t \rightarrow 0$ , o ângulo  $\theta$  na figura 28a tende a zero e o ponto  $P_2$  se aproxima do ponto  $P_1$ . Neste limite,  $\Delta \vec{v}$  aponta exatamente para o centro da circunferência. Logo, a aceleração instantânea aponta para o centro da circunferência.

Sempre que vocês tiverem uma partícula se movendo com velocidade de módulo constante,  $v$ , em uma trajetória circular de raio  $r$ , estejam certos de que sua aceleração está sempre dirigida para o centro da circunferência e seu módulo é igual a  $v^2/r$ . Esta aceleração da partícula em MCU é chamada de **aceleração centrípeta**. Na figura 30, mostramos a velocidade e a aceleração de uma partícula, em vários instantes, em MCU.

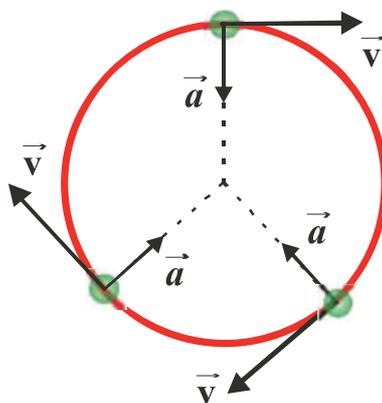


Figura 30: No MCU, a aceleração está sempre dirigida para o centro.

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

(Resnick, Halliday) A Lua gira em torno da Terra, completando uma revolução em 27,3 dias. Suponham que sua órbita seja circular e tenha um raio de 385 000 km. Qual é o valor de aceleração da Lua neste movimento?

SOLUÇÃO: A velocidade da Lua, suposta constante será o espaço percorrido pelo intervalo de tempo. Sendo o espaço o comprimento da sua trajetória circular temos,

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

Em que  $T = 27,3 \text{ dias} = 2,36 \times 10^6 \text{ s}$  é o tempo gasto para a Lua completar uma volta e  $r = 385 \text{ 000 km} = 3,85 \times 10^8 \text{ m}$  é o raio da trajetória circular. Daí

$$v = \frac{2\pi \cdot 3,85 \times 10^8}{2,36 \times 10^6} = 1020 \text{ m/s.}$$

A aceleração centrípeta é

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{1020^2}{3,85 \times 10^8} = 0,00273 \text{ m/s}^2.$$

Observem que esta aceleração é apenas  $2,78 \times 10^{-4}$  vezes a aceleração da gravidade  $g$ .

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

(Resnick & Halliday) Calculem a velocidade de um satélite artificial da Terra, supondo que ele se encontre em uma órbita à altura  $h$  de 230 km acima da superfície da Terra, onde  $g = 9,5 \text{ m/s}^2$ . O raio da Terra,  $R$ , é de 6 370 km.

SOLUÇÃO: Como o satélite está próximo a Terra ele possui uma aceleração gravitacional dirigida para o centro da mesma, como qualquer corpo. Em virtude desta aceleração, ele descreve uma órbita circular que consideramos uniforme. Logo sua aceleração é a aceleração centrípeta. Sendo assim,

$$g = a = \frac{v^2}{r} = \frac{v^2}{R+h}.$$

Onde consideramos o raio  $r$  como sendo a distância do centro da Terra até o satélite. Sendo  $R = 6370 \text{ km} = 6,37 \times 10^6 \text{ m}$  e  $h = 230 \text{ km} = 2,30 \times 10^5 \text{ m}$ , temos

$$v = \sqrt{g(R+h)}$$

$$v = \sqrt{9,5(6,37 \times 10^6 + 2,30 \times 10^5)} = 7,9 \times 10^3 \text{ m/s.}$$

## 3.8. Movimento Relativo

Suponham que vocês estejam em um carro que se move em uma auto-estrada reta em um carro com velocidade escalar constante de 80 km/h. Os outros passageiros que estão com vocês movem-se à mesma velocidade escalar. Porém, a velocidade de vocês em relação aos outros passageiros é igual a zero. Ao passar por um posto de gasolina, um frentista parado observa o carro de vocês se movendo com uma velocidade de 80 km/h.

Se vocês atirarem uma bola verticalmente para cima, ela irá subir e descer pousando exatamente na sua mão. A bola terá movimento horizontal devido ao movimento do carro. Vocês e a bola terão o mesmo movimento horizontal e não haverá movimento relativo entre vocês.

Por outro lado, para o frentista no posto de gasolina, o resultado é diferente. A bola tem uma componente de velocidade para frente de 80 km/h e uma componente vertical resultante do movimento que ela recebeu de vocês. Sabemos que um projétil nessa situação segue uma trajetória parabólica, como vimos quando estudamos lançamento de projéteis. Portanto, vocês e o frentista teriam de usar equações diferentes para descrever o movimento, mas concordariam entre si que o vetor aceleração coincide com a aceleração da gravidade.

Se agora outro carro se colocasse ao lado de vocês e passasse com o velocímetro dele marcando uma velocidade constante de 90 km/h, vocês observariam esse carro (em relação ao próprio referencial de vocês) se movendo lentamente para frente à taxa de 10 km/h ( $= 90 \text{ km/h} - 80 \text{ km/h}$ ). Tentem eliminar os detalhes externos como: a paisagem que se “afasta”, o ar que passa pelo carro em movimento, as irregularidades da estrada e o barulho do motor. Considerem somente os dois carros. Vocês não teriam como definir qual deles estaria “realmente” se movendo. Por exemplo, o carro que passa poderia estar em repouso e vocês poderiam estar se movendo para trás

a 10 km/h. O resultado observado seria o mesmo.

Observem que a velocidade dos corpos depende do que vocês consideram como referencial. Nesta seção, vamos considerar a descrição do movimento de uma única partícula por dois observadores que estão em movimento uniforme um em relação ao outro. Com esse objetivo, vamos considerar o referencial  $A$ , com eixos  $Oxyz$ , e o referencial  $B$ , com eixos  $O'x'y'z'$ , que se movimenta em relação a  $A$  de tal modo que os eixos  $O'x'$ ,  $O'y'$  e  $O'z'$  permaneçam sempre paralelos aos eixos  $Ox$ ,  $Oy$  e  $Oz$ , respectivamente. Além disso, vamos supor que o referencial  $B$  se move com velocidade  $\vec{V}$  constante quando observado do referencial  $A$ .

Vamos analisar o movimento de uma partícula em relação ao referencial  $A$  e também em relação ao referencial  $B$ . Seja  $\vec{r}_A$  o vetor posição da partícula no referencial  $A$ ,  $\vec{r}_B$  o vetor posição no referencial  $B$  e  $\vec{R}$  o vetor posição da origem do referencial  $B$  em relação ao referencial  $A$ .

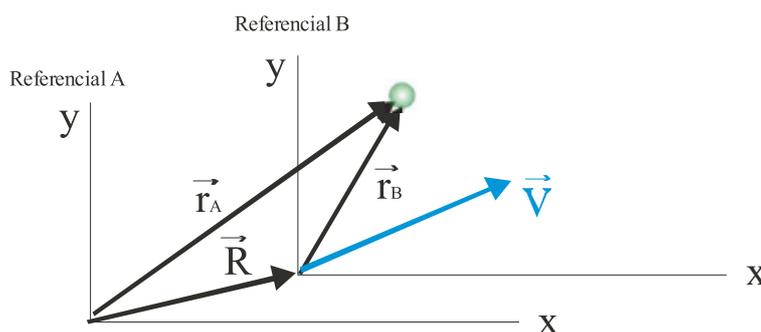


Figura 31: Posições de uma partícula em movimento em relação aos referenciais  $A$  e  $B$ , estando  $B$  em MRU em relação a  $A$  com velocidade  $\vec{V}$ .

A Figura 31 ilustra essa situação num dado instante de tempo  $t$ . O desenho mostra apenas dois dos eixos para cada referencial, a fim de não sobrecarregar a figura. Observando a figura podemos ver que

$$\vec{r}_A = \vec{r}_B + \vec{R} \quad (52)$$

Derivando as expressões anteriores em relação ao tempo, obtemos

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{V} \quad (53)$$

em que  $\vec{v}_A$ ,  $\vec{v}_B$  e  $\vec{V}$  são a velocidade da partícula no referencial  $A$ , a velocidade da partícula no referencial  $B$  e a velocidade do referencial  $B$  em relação ao  $A$ , respectivamente.

Derivando agora a equação (53) com relação ao tempo, encontramos

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B. \quad (54)$$

Uma vez que o referencial  $B$  se move com velocidade constante em relação ao referencial  $A$ , temos que  $d\vec{V}/dt = 0$ . Conseqüentemente, qualquer que seja o movimento da partícula considerada, a sua aceleração em relação a  $A$ , num dado instante, é exatamente igual à sua aceleração em relação a  $B$  nesse instante, desde que se cumpram as seguintes condições:

- que os eixos de  $A$  permaneçam paralelos aos eixos de  $B$  e
- que o referencial  $B$  se mova em MRU em relação a  $A$ .

O resultado da equação (54) implica em dizer que se uma partícula tem certa aceleração em relação em um referencial  $A$ , ela tem a mesma aceleração em qualquer outro referencial  $B$  que se mova com velocidade constante.

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

(Sears & Zemansky) Vocês estão dirigindo do sul para o norte por uma estrada retilínea de duas pistas com velocidade constante de 88 km/h. Um caminhão se aproxima de vocês em sentido contrário com velocidade constante de 104 km/h (na outra pista).

- Qual a velocidade do caminhão em relação a vocês?
- Qual a velocidade de vocês em relação ao caminhão?
- Como as velocidades variam depois que o caminhão cruzar com vocês?

### SOLUÇÃO:

Escolhamos o caminhão como sendo a partícula, vocês como sendo o referencial B em movimento com velocidade constante de  $V = 88$  km/h em relação à Terra que será o referencial A fixo. A velocidade do caminhão em relação à Terra é 104 km/h. Esse é o valor do módulo de  $\vec{v}_A$ . Podemos considerar o movimento em linha reta como sendo ao longo do eixo y. Assim, usamos apenas a componente y da equação (53).

- Considerando que vocês se movem no sentido positivo do eixo Oy obtemos:

$$\begin{aligned}\vec{v}_A &= \vec{v}_B + \vec{V} \\ v_{Ay} &= v_{By} + V_y \\ -104 &= v_{By} + 88 \\ v_{By} &= -192 \text{ km/h}\end{aligned}$$

Observem que aqui usamos  $v_{Ay} = -104$  km/h (negativo) uma vez que o caminhão se move no sentido contrário ao eixo Oy. Por esse mesmo motivo, no referencial do carro, encontramos um valor negativo para a velocidade do caminhão,  $v_{Bx} = -192$  km/h. Significa que o caminhão se aproxima de vocês no sentido norte-sul.

- Se o caminhão se aproxima de vocês no sentido norte-sul, é claro que vocês também se aproximam do caminhão com a mesma velocidade, porém com sentido contrário. Logo a velocidade de vocês em relação ao caminhão é igual a +192 km/h no sentido sul-norte. Valor positivo, pois a velocidade de vocês é ao longo do eixo Oy.
- As velocidades não variam de forma alguma após o caminhão cruzar com vocês. As posições relativas não importam no cálculo da velocidade relativa. A velocidade relativa do caminhão em relação a vocês continua sendo -192 km/h, mas agora ele se afasta de vocês em vez de se aproximar.

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

(Halliday & Resnick) A bússola em um avião indica que ele se dirige para o leste e o indicador da velocidade em relação ao ar marca 215 km/h. Um vento sopra em direção ao norte continuamente a 65 km/h.

- Qual a velocidade do avião em relação ao solo?
- Se o piloto desejasse voar para leste, para onde deveria apontar o avião? Isto é, qual deveria ser a direção marcada na bússola?

### SOLUÇÃO:

Vamos considerar o avião como sendo a partícula, o ar é o referencial B e a Terra é o referencial A. Consideremos também o eixo Ox apontando para o leste e o eixo Oy para o norte. Dessa forma,  $v_{Bx} = 215$  km/h é a velocidade do avião (partícula) em relação ao ar (B) e  $V_y = 65$  km/h é a velocidade do referencial B (ar) em relação ao referencial A (Terra).

- a) Estamos interessados em calcular a velocidade  $\vec{v}_A$ , do avião em relação à Terra. As velocidades dadas apontam em direções diferentes. Então para usamos a equação (53), devemos realizar uma operação vetorial. Observem na figura abaixo como ficará a soma vetorial:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B + \vec{V}$$

A figura abaixo mostra que os vetores formam um triângulo retângulo. O módulo de  $\vec{v}_A$  é dado por

$$v_A = \sqrt{v_{Bx}^2 + V_y^2}$$

$$v_A = \sqrt{215^2 + 65^2} = 225 \text{ km/h}$$

O ângulo  $\alpha$  na figura decorre de

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{V_y}{v_A}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{65}{225}\right) = 16,1^\circ$$

Observem que a velocidade do avião em relação ao solo é maior que em relação ao ar e sua direção forma um ângulo de  $16,1^\circ$  para nordeste.

- b) Se o piloto desejasse voar para o leste deveria apontar o avião em relação ao ar, de modo que sua velocidade em relação ao solo apontasse para o leste, como mostrada na figura. A velocidade do vento permanece inalterada.

Observando o triângulo da figura abaixo vemos que a velocidade do avião  $v_A$  seria agora

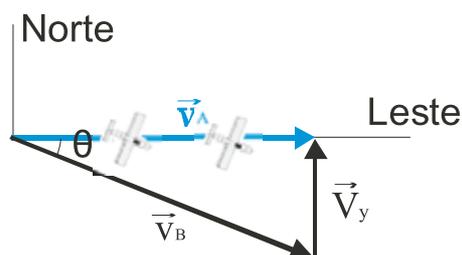
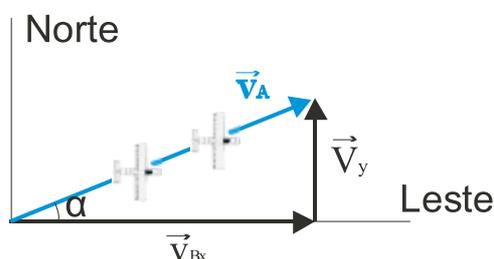
$$v_A = \sqrt{v_{Bx}^2 - V_y^2}$$

$$v_A = \sqrt{215^2 - 65^2} = 205 \text{ km/h}$$

e a orientação do avião seria o ângulo  $\theta$  dado por

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{V_y}{v_A}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{65}{215}\right) = 17,6^\circ$$

Ao orientar o avião desta forma, a velocidade do avião em relação ao solo é menor que sua velocidade em relação ao ar.



## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

10. Uma pedra amarrada em um barbante realiza um movimento circular e uniforme, em um plano horizontal, com velocidade de 3 m/s. Sendo o raio da circunferência igual a 0,5 m, determine o valor da aceleração centrípeta.
11. Um corpo realiza um movimento circular e uniforme, em uma circunferência com raio de 2 metros. Determine a velocidade do corpo, sabendo que sua aceleração centrípeta é igual a 8 m/s<sup>2</sup>.
12. A Lua realiza, ao redor da Terra, um movimento aproximadamente circular e uniforme, com velocidade de 1000 m/s. Sendo o raio de sua órbita igual a 400 000 quilômetros, determine sua aceleração centrípeta.
13. Um carro se move com velocidade linear constante. Em sua trajetória ele realiza duas curvas, semicirculares, seguidas. Uma das curvas tem o dobro do raio da outra. Em qual das curvas a aceleração centrípeta é maior? Qual a relação entre as acelerações?
14. Um avião pretende desembarcar numa cidade situada ao norte do aeroporto de saída em exatamente 2 horas. Ele sabe que o vento em toda a região tem velocidade de 100 km/h para o norte e que a cidade está a uma distância de 800 km. Que velocidade deverá ser mantida pelo avião?
15. Uma pessoa anda sobre uma esteira rolante no sentido oposto ao do movimento da esteira. A velocidade da esteira é de 8,0 m/s e a da pessoa é de 12 m/s. Quanto tempo essa pessoa levará para afastar-se de 20 m do início da esteira?
16. Imagine que você e seu colega estejam assentados em bancos da Maria Fumaça que faz o trajeto de Tiradentes a São João Del Rei. A distância entre os bancos é de 12 m e um banco está atrás do outro e você está no banco de trás. Se a velocidade da Maria Fumaça é de 20 m/s e você lança uma bola para seu colega com velocidade de 10 m/s, determine:
  - j) Quanto tempo leva a bola para chegar ao seu colega?
  - k) Se no momento do lançamento você estava passando ao lado de um poste, que distância a bola deslocou em relação ao poste até atingir a mão de seu companheiro?
17. Duas locomotivas mantêm velocidades de 60 km/h e 80 km/h, respectivamente. O comprimento de cada locomotiva e de seus vagões é de 700 m cada uma. Quanto tempo leva uma composição para passar pela outra se:
  - a) as duas viajam em sentidos opostos?
  - b) as duas viajam no mesmo sentido?
18. Qual é a velocidade da correnteza de um rio, se um barco se move a 50 km/h rio abaixo e 14 km/h rio acima, mantendo sempre uma velocidade própria?
19. Um avião mantém uma velocidade de 500 km/h em relação ao ar (velocidade em regiões sem vento). Na região sopra um vento de 300 km/h para o norte. Em que direção deve voar, e quanto tempo gastará na viagem para que possa chegar a uma cidade situada a 1200 km a leste.
20. Um avião viajando para o norte gasta 3 h para cobrir o percurso de 1350 km entre duas cidades. Na volta gasta 4 horas para percorrer 1400 km. Sabendo que o vento tem a direção norte-sul,
  - a) qual é o sentido da velocidade do vento?
  - b) qual é a velocidade própria do avião?
  - c) qual é a velocidade do vento?

## RESPOSTAS

2. (a)  $v_{1x} = 17,3$  m/s e  $v_{1y} = 10$  m/s, (b)  $v_{2x} = 5$  m/s e  $v_{2y} = 8,7$  m/s, (c) 2,0 m/s<sup>2</sup> formando 239,5° com o eixo Ox; 3. (a)  $t = 0$  s, (b)  $t = 0$  s, (c)  $t = 0$  s, (0 ; 20,0) m,  $t = 5,9$  s, (14,2 ; -4,4) m, (d)  $t = 5,3$  s,  $r = 2,4$  m; 4. (a) 18 m/s<sup>2</sup> contrária ao eixo Ox, (b) 0,75 s, (c) Nunca; 5. (a) 0,8 m, (b) 0,4 s; 6. 883,35 m; 7. 400 m/s; 8. 2020 m; 9. ~2000 m; 10. 18 m/s<sup>2</sup>; 11. 4 m/s<sup>2</sup>; 12.  $2,5 \times 10^{-3}$  m/s<sup>2</sup>; 13. O raio menor produz aceleração duas vezes maior; 14. 500 km/h; 15. 5 s; 16. (a) 1,2 s, (b) 36 m; 17. (a) 36 s, (b) 252 s; 18. 18 km/h; 19. -36,9° com o eixo Ox,  $t = 3$  h; 20. (a) Norte, (b) 400 km/h, (c) 50 km/h.

## 4. DINÂMICA DA PARTÍCULA

### 4.1. Introdução

Nos capítulos iniciais estudamos o movimento de uma partícula, principalmente os movimentos retilíneos e planos, sem indagar a causa do movimento. Simplesmente o descrevemos, utilizando os vetores  $\vec{r}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{a}$ . Neste capítulo, vamos discutir parte da Física que estuda a relação entre força e movimento. A essência desta parte da Física é estudar os movimentos dos corpos e suas causas, sem deixar de lado os conceitos de cinemática, previamente estudados. Esse ramo da Física é denominado de Dinâmica. Assim como antes, os corpos serão tratados como partículas.

O estudo da dinâmica teve início com Aristóteles por volta de 384 a.C. Aristóteles elaborou uma teoria na tentativa de explicar os movimentos dos corpos. Essa teoria permaneceu válida por muito tempo. Um dos vários aspectos desta lei dizia que um corpo só permaneceria em movimento se uma força continuasse a imprimir sobre ele uma determinada força. Anos mais tarde, Galileu Galilei realizou novos estudos sobre os movimentos dos corpos uniformemente acelerados e sobre o movimento do pêndulo. Em seus estudos Galileu Galilei descobriu a lei do movimento e enunciou a lei da inércia. Em sua lei, Galileu dizia que a tendência natural dos corpos, na ausência de forças externas, é de se manterem em repouso ou em movimento retilíneo uniforme. Isto significa que pode existir movimento sem que exista a atuação de forças externas sobre o corpo. As idéias de Galileu foram precursoras das Leis de Newton.

Isaac Newton, um cientista inglês, nascido no ano 1643, em Woolsthorpe, desenvolveu plenamente as idéias de Galileu e as publicou na obra “Principia Mathematica Philosophiae Naturalis”. Nesta obra ele descreveu seus estudos e enunciou as três leis fundamentais do movimento, nomeadas de “As Leis de Newton”.



#### SAIBA MAIS

*Além de enunciar as Leis do movimento, Newton concebeu a idéia de gravitação universal e formulou a respectiva lei, além de descobrir a composição da luz branca. Foi hábil experimentador, matemático de primeira ordem, conhecedor da Bíblia e que atualmente poderíamos denominá-lo físico teórico.*

### 4.2. Primeira Lei de Newton

Antes da época de Galileu a maioria dos filósofos pensava que alguma influência ou força era necessária para manter um corpo em movimento. Eles diziam que o corpo em repouso estava em seu “estado natural”. Para um corpo mover-se em linha reta com velocidade constante, por exemplo, acreditava-se que algum agente externo teria que empurrá-lo continuamente, de outro modo ele “naturalmente” pararia.

Galileu, estudando uma esfera em repouso sobre um plano horizontal, observou que, empurrando-a com determinada força, ela se movimentava. Cessando o empurrão (força), a esfera continuava a se mover até percorrer determinada distância. Verificou, portanto, que a esfera continuava em movimento sem a ação de uma força e que a esfera parava em virtude do atrito entre a esfera e o plano horizontal. Polindo o plano horizontal, observou que o corpo se movimentava durante um percurso maior após cessar o empurrão. Se pudesse eliminar completamente o atrito, a esfera continuaria a se movimentar, por inércia, indefinidamente, sem retardamento, isto é, em movimento retilíneo e uniforme. Esta foi a conclusão de Galileu, que afirmou ser necessária alguma força externa para *modificar* a velocidade de um corpo, mas nenhuma força externa seria exigida para *manter* tal velocidade.

Esse princípio de Galileu foi adotado por Newton como a primeira de suas três leis do movimento:

**Qualquer corpo permanece em seu estado de repouso ou de movimento retilíneo uniforme, a menos que seja obrigado a modificar tal estado por forças aplicadas a ele.**

Por exemplo, quando um carro se movimenta numa estrada reta com velocidade constante, ao entrar numa curva, ele tende a manter a velocidade constante e, portanto sair pela tangente à curva. Para efetuar a curva, os pneus são dispostos de forma a receber do solo uma força capaz de variar a direção da velocidade.

No enunciado da primeira lei não existe distinção entre força nula e resultante das forças nula. Na prática, não é possível obter um ponto material livre da ação de forças. No entanto, se o ponto material estiver sujeito a um sistema de forças cuja resultante é nula, ele estará em repouso ou descreverá movimento retilíneo e uniforme. A existência de forças, não equilibradas, produz variação da velocidade do ponto material.

A primeira lei de Newton é de fato uma afirmação sobre referenciais, pois, em geral, a aceleração de um corpo depende do sistema de referência onde ela é medida. Podemos encontrar uma família de referenciais em que a partícula possui aceleração nula.

A tendência que um corpo possui de permanecer em repouso ou em movimento retilíneo e uniforme, quando livre da ação de forças ou sujeito a forças cuja resultante é nula, é interpretada como uma propriedade que os corpos possuem denominada inércia. Por isso a primeira lei de Newton é frequentemente chamada lei de inércia e os referenciais onde ela se aplica são chamados referenciais inerciais.

Quando os movimentos tiverem grande duração e se exigir precisão, adotar-se-á como referencial as estrelas distantes cujas posições têm sido consideradas invariáveis durante anos de observação.

### 4.3. Força

O conceito científico de força foi introduzido nos quadros do pensamento humano por Johannes Kepler (1571-1630), o astrônomo alemão que se tornou famoso principalmente por ter descoberto as leis do movimento dos planetas em torno do Sol. Antes de Kepler, o conceito dominante de força, era o dos aristotélicos: força podendo ser apenas empurrão ou puxão. O conceito de força que vamos apresentar a seguir e que adotamos por julgar o mais conveniente para as nossas finalidades é o conceito clássico construído por Galileu e Newton.

Imaginem uma bola de bilhar rolando sobre o piso de certa sala, plana e horizontal. Sabemos que não será possível a bola “resolver”, num determinado instante, por si só, fazer uma curva para a esquerda, ou para a direita, ou aumentar a sua velocidade, ou parar num certo ponto e começar a pular, etc. Acreditamos que a velocidade da bola só poderá ser alterada se alguma coisa agir sobre ela. Como vimos, a incapacidade de a bola alterar a sua própria velocidade é chamada de Inércia e essa alguma coisa capaz de alterar a velocidade da bola é precisamente o que Newton chamou força.

As situações apresentadas acima são, em traços gerais, as que foram imaginadas por Galileu e sobre as quais Newton se apoiou para definir o que chamamos força. Elas fundamentam, essencialmente, a nossa crença de que:

- 1º) se um corpo estiver em repouso, para pô-lo em movimento é necessário fazer agir alguma coisa sobre ele;
- 2º) se a velocidade de um corpo aumenta, é porque alguma coisa age sobre ele;
- 3º) se a velocidade de um corpo diminui, é porque alguma coisa age sobre ele;
- 4º) se a velocidade de um corpo muda de direção, é porque alguma coisa age sobre ele.

A essa alguma coisa capaz de pôr em movimento um corpo que está em repouso, ou capaz de modificar de alguma forma a sua velocidade, é que Newton denominou força, sendo a seguinte a definição por ele apresentada:

**Chama-se força atuante sobre um corpo a qualquer agente capaz de modificar o seu estado de repouso ou de movimento retilíneo e uniforme.**

É extremamente importante observar que repouso e movimento são sempre relativos a um determinado referencial. Conseqüentemente podemos dizer que as forças atuantes sobre qualquer corpo dependem estreitamente do referencial que se considere. Esta observação é fundamental para a compreensão da Mecânica, e muitos problemas serão evitados se especificarmos, sem dúvida, qual o referencial que está sendo utilizado.

Como vimos, a força está diretamente associada a variações da velocidade dos corpos, ou seja, a sua aceleração. A força é responsável pela aceleração dos corpos. Assim como a aceleração, a força também é uma grandeza vetorial. Como tal, ela apresenta módulo, direção e sentido e obedece todas as regras de operações vetoriais.

A unidade de força no Sistema Internacional é denominada de newtons (N) em homenagem a Isaac Newton e é definida a partir da aceleração que ela imprime em um corpo-padrão. A este corpo-padrão foi atribuída exatamente por definição, a massa de um quilograma (Capítulo 1). Quando o corpo padrão adquire uma aceleração igual a  $a$ , sabemos que uma força  $F$  deve estar atuando sobre ele e que a magnitude da força (dada em newtons) é numericamente igual à sua aceleração (dada em  $\text{m/s}^2$ ). Por exemplo, se o corpo padrão adquire uma aceleração de  $1 \text{ m/s}^2$ , a força que produziu esta aceleração é igual a  $1 \text{ N}$ .

#### 4.4. Massa e Segunda Lei de Newton

Nossa experiência diária nos diz que se aplicarmos uma mesma força em objetos diferentes esta produzirá acelerações diferentes. Sob a ação de uma mesma força, sabemos que uma bola de tênis receberia a aceleração maior que uma bola de boliche. Na seção anterior determinamos a aceleração produzida por forças em um corpo-padrão. Vamos agora quantificar a aceleração produzida em corpos quaisquer.

Suponham que aplicamos em um corpo-padrão,  $m_0 = 1,0 \text{ kg}$ , uma força e provoquemos nele uma aceleração de  $a_0 = 2,0 \text{ m/s}^2$ . Substituímos o corpo-padrão por outro corpo arbitrário de massa  $m_1$  e aplicamos a mesma força. Supostamente a aceleração agora adquirida pelo corpo é  $a_1 = 0,5 \text{ m/s}^2$ .

Considerando que a mesma força atua nos dois exemplos, definimos a razão das massas dos dois corpos como o inverso da razão das acelerações nelas provocadas

$$\frac{m_1}{m_0} = \frac{a_0}{a_1} \quad (55)$$

No exemplo temos

$$0 \quad m_1 = m_0 \frac{a_0}{a_1} = 1,0 \frac{2,0}{0,5} = 4,0 \text{ kg}$$

O segundo corpo, cuja aceleração é apenas um quarto da aceleração do primeiro, tem por definição, massa quatro vezes maior que o primeiro corpo. Ou seja, quanto maior a massa, menor é a aceleração quando a mesma força atua neles. Logo a massa pode ser considerada como uma medida quantitativa da inércia. O procedimento descrito acima pode ser usado para atribuir massa a qualquer corpo. Sempre escrevendo uma equação semelhante à equação (55) que compara as massas de dois corpos com suas correspondentes acelerações.

Vamos considerar agora um bloco de massa  $m$  apoiado sobre uma superfície totalmente lisa e em equilíbrio (a resultante das forças sobre ele seja nula). Ao aplicarmos uma força  $\vec{F}$  sobre este bloco, ele irá adquirir uma aceleração  $\vec{a}$ , como indicado na figura 32.

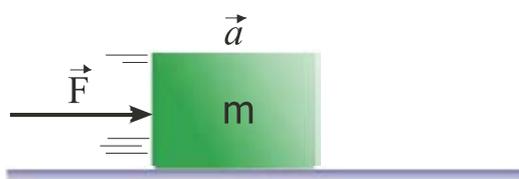


Figura 32: A força  $\vec{F}$  provoca uma aceleração  $\vec{a}$  no bloco.

Experimentalmente é mostrado que se duplicarmos a força sobre a mesma massa  $m$  sua aceleração duplica, se triplicarmos a força sobre a mesma massa  $m$  sua aceleração triplica e assim por diante. Em outras palavras, o módulo da força é proporcional ao da aceleração:

$$|F| \propto |a|. \quad (56)$$

Sendo que para este corpo sua massa é sempre constante, podemos eliminar o sinal de proporcionalidade,  $\alpha$ , e definir numericamente a massa como a razão entre a força  $\vec{F}$  aplicada no corpo e a aceleração por ele adquirida  $\vec{a}$ . É importante notar que esta definição de massa foge da que temos inicialmente, de que massa é a quantidade de matéria que determinado corpo possui. A definição numérica de massa nos leva à equação:

$$m = \frac{\vec{F}}{\vec{a}} \Rightarrow \vec{F} = m\vec{a}. \quad (57)$$

Esta equação resume todas as experiências e definições descritas acima. Ela é a equação fundamental da mecânica clássica. Nela,  $\vec{F}$  é a soma vetorial de todas as forças que atuam sobre o corpo,  $m$  é a massa do corpo e  $\vec{a}$  é a sua aceleração. A equação (57) pode ser considerada como o enunciado da segunda lei de Newton.

Observem na equação (57) que a aceleração que uma partícula adquire é diretamente proporcional a força resultante que atua sobre ela e inversamente proporcional a sua massa. Além disso, a aceleração terá a mesma direção e sentido da força resultante.

Notem que a primeira lei de Newton está contida na segunda lei como um caso particular. Quando a força resultante sobre a partícula é nula,  $F = 0$ , a aceleração também será nula,  $a = F/m = 0/m = 0$ . Logo, a partícula estará em repouso ou com movimento retilíneo uniforme (a velocidade não muda).

Como a equação (57) é vetorial, podemos escrevê-la em componentes ao longo de eixos cartesianos:

$$F_x = ma_x, \quad F_y = ma_y \quad \text{e} \quad F_z = ma_z. \quad (58)$$

Essas equações relacionam as componentes  $x$ ,  $y$  e  $z$  da força resultante,  $\vec{F} = (F_x; F_y; F_z)$  com as componentes do vetor aceleração,  $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ . Lembrando que  $F_x$  é a soma das componentes  $x$  de todas as forças que atuam sobre  $m$  e analogamente  $F_y$  e  $F_z$ .

## 4.5. Terceira Lei de Newton

Sabemos que força é fruto da interação entre dois corpos. Ou seja, uma força atuante em um corpo representa uma ação de outro corpo sobre o primeiro. Isaac Newton percebeu que toda ação estava associada a uma reação, de forma que, numa interação, enquanto o primeiro corpo exerce força sobre o outro, também o segundo exerce força sobre o primeiro. Assim, em toda interação teríamos o nascimento de um par de forças: o par ação-reação.

O Princípio da Ação e Reação constitui a terceira lei de Newton e foi originalmente enunciada como:

**A cada ação sempre se opõe uma reação igual, ou seja, as ações mútuas de dois corpos, um sobre o outro, são sempre iguais e dirigidas para partes contrárias.**

Em outras palavras, se um corpo A aplicar uma força sobre um corpo B, receberá deste uma força de mesma intensidade, mesma direção e sentido oposto à força que aplicou em B.

Podemos observar essa troca de forças entre dois corpos, por exemplo, na colisão abaixo.

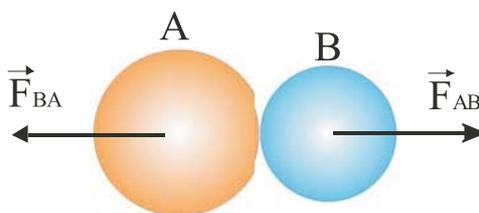


Figura 33: A força que A exerce em B ( $\vec{F}_{BA}$ ) e a correspondente força que B exerce em A ( $\vec{F}_{AB}$ ) em uma colisão de duas bolas.

As forças representadas na figura 33 constituem um par ação-reação da interação de contato. Essas forças possuem mesma intensidade, mesma direção e sentidos opostos. Matematicamente podemos escrever:

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA} \quad (59)$$

Imagine um jogador chutando uma bola. A força exercida sobre a bola pelo jogador, acelera a bola (em direção ao gol). Ao mesmo tempo, a bola exerce uma força igual e contrária sobre o pé do jogador que o desacelera (diminui a velocidade do pé.).

Notem que as forças de ação e de reação, que sempre ocorrem em pares, atuam sobre corpos diferentes. Se elas agissem no mesmo corpo, nunca teríamos movimento acelerado, pois a força resultante sobre qualquer corpo seria sempre nula.

## 4.6. Peso e Massa

O peso é a força gravitacional exercida sobre qualquer objeto situado próximo à superfície da Terra. Os animais, as plantas, a água, o ar, as pedras, todos os corpos, enfim, estão sujeitos à atração gravitacional da Terra. Se vocês sobem numa cadeira e saltam, vocês cairão em direção ao chão, pois a força da gravidade puxa o corpo de vocês para baixo.

Em física, a palavra peso é usada com um significado diferente, daquele que damos a ela em nosso dia-a-dia. Usualmente essa palavra é empregada em frases como: “Meu peso é 65 quilos”; “Por favor, me pesa 600 gramas de carne”. “Esse menino, quando nasceu, pesava 3 quilos e 750 gramas”. Todos nós já nos expressamos com frases como essas. E todos entendem muito bem o que queremos dizer. Mas, do ponto de vista da física, nessas frases há uma confusão entre duas grandezas: a massa e o peso.

A massa está associada com a quantidade de “matéria” presente no corpo e é uma grandeza escalar. Ao dizer que, o peso de um pacote é 2 kg, por exemplo, estamos utilizando erroneamente a palavra peso no lugar de massa de um corpo. A massa de um corpo não se altera se ele for levado da Terra para qualquer outro lugar do universo. Mas, dependendo do lugar em que ele estiver seu peso muda. Se vocês viajam da Terra para a Lua, as suas massas não sofrem qualquer modificação pelo fato de ter saído da Terra e ido para a Lua. Porém, ao chegarem à Lua, vocês sentirão uma diferença em seus pesos.

A força com que a Lua atrai os corpos próximos à sua superfície é aproximadamente seis vezes menor do que a força com que a Terra atrai os mesmos corpos quando eles estão aqui. Por isso, os astronautas sentem-se mais leves na Lua.

Quando um corpo de massa  $m$  cai livremente, sua aceleração é a da gravidade  $\vec{g}$ , e a força que atua nele é seu peso  $\vec{w}$ . Podemos aplicar a segunda lei de Newton em um corpo em queda livre. Como a única força atuando sobre o corpo é a força gravitacional (peso) teremos:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m\vec{a} \\ \vec{w} &= m\vec{g}. \end{aligned} \quad (60)$$

Tanto  $\vec{w}$  como  $\vec{g}$  são vetores orientados para o centro da Terra. Então é válida a relação

$$w = mg. \quad (61)$$

Onde  $w$  e  $g$  são os módulos do peso e da aceleração da gravidade.

Como estudamos em capítulos anteriores, o valor de  $g$  é o mesmo para qualquer corpo em queda no mesmo local. Próximo a Terra  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ . Porém, quando nos afastamos da Terra, na Lua, por exemplo, o valor de  $g$  diminui drasticamente. Sendo a massa constante, o nosso peso quando medido na lua, apresenta um valor menor que na Terra. Portanto, ao contrário da massa do corpo, que é uma grandeza intrínseca do corpo, o peso do corpo depende de sua localização. Em uma nave espacial, livre da influência da gravidade, o peso de qualquer corpo será igual a zero.



Figura 34: Balança de braços iguais (www. ferrao.org)

Sendo o valor de  $g$  o mesmo para todos os objetos no mesmo lugar, a razão dos pesos de dois objetos deve ser igual a razão de suas massas. Portanto, uma balança de braços iguais, que é essencialmente um instrumento para comparar duas forças dirigidas para baixo, pode ser usada na prática para comparar massas. Se uma quantidade de farinha, colocada em um dos pratos de uma balança, está exercendo uma força para baixo naquele prato igual à que é exercida por um quilograma-padrão, colocado no outro prato, sabemos que a massa de farinha é igual a um quilograma.

É sempre importante distinguir cuidadosamente a grandeza vetorial peso, representada por  $\vec{w}$ , da grandeza escalar massa, representada por  $m$ .

#### 4.7. Aplicações das Leis de Newton

Vamos apresentar aqui alguns procedimentos que iremos adotar para resolver problemas de mecânica clássica. A segunda lei de Newton estabelece que a resultante das forças que atuam sobre um corpo é igual ao produto de sua massa pela aceleração. Sendo assim o primeiro passo será:

- 1) Identificar o corpo ao qual o problema se refere;
- 2) Analisar toda a vizinhança do corpo (tais como planos inclinados, molas, cordas, a Terra, etc.) e verificar quais as forças que atuam sobre o corpo;
- 3) Selecionar um referencial (inercial) conveniente. Devemos orientar os eixos de coordenadas de forma a simplificar o próximo passo. Vamos escolher a direção crescente de um dos eixos como sendo ao longo da aceleração do corpo;
- 4) Construimos um diagrama, separando o corpo sozinho, os eixos escolhidos e todas as forças que atuam sobre o corpo;
- 5) Finalmente aplicamos a equação (58) da segunda lei de Newton a cada um dos eixos representados no diagrama, separadamente.

Vamos ver na prática como aplicar esses cinco passos. Cada corpo é tratado como se fosse uma partícula de massa definida, de forma que as forças que atuam sobre ele podem supor-se agindo em um ponto.



## SAIBA MAIS

([http://rived.mec.gov.br/atividades/concurso2006/carrinhorolima/fis1\\_ativ1.swf](http://rived.mec.gov.br/atividades/concurso2006/carrinhorolima/fis1_ativ1.swf)) Neste site vocês irão se divertir com os conceitos de física relacionados às Leis de Newton. Irão ver os conceitos de física envolvidos nas Leis de Newton, tais como massa, peso, força e atrito, relacionando estes com a atividade proposta. Além disso, poderão estender a aplicação destes em outras situações da sua vida.

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

Um tipo de lustre, usado como objeto de decoração, fica suspenso no teto por meio de apenas um cabo. A massa desse lustre é de 5 kg. Suponham que a massa do cabo seja desprezível.

- Qual é o peso desse lustre?
- Qual é a força (módulo, direção e sentido) que o cabo exerce sobre o lustre?
- Qual é a tensão no cabo que suporta o lustre?

### SOLUÇÃO:

- a) Em qualquer situação, o peso de um corpo sempre será sua massa vezes a aceleração da gravidade e apontará para o centro da Terra. Logo, sendo  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ , temos

$$w = mg = 5 \times 9,8 = 49 \text{ N}$$

- b) Para responder essa pergunta, vamos aplicar a segunda lei de Newton. Para isso seguiremos os passos citados na seção 4.7. O objeto a ser estudado é o lustre. Sem considerar o cabo. Dessa forma, as forças que atuam no lustre são somente o seu peso,  $\vec{w}$ , e a força do cabo sobre o lustre  $\vec{T}$ . Essas forças apontam na direção vertical então consideremos os eixos coordenados de forma que  $Oy$  fique na direção vertical e crescente de baixo para cima (como na letra b da figura abaixo). Representamos o lustre como um ponto na origem dos eixos e nele aplicamos as forças. O lustre está parado, logo todas as suas componentes da aceleração são iguais a zero,  $\vec{a} = 0$ . Como não temos nenhuma força na direção horizontal  $Ox$ , tomamos apenas a componente  $y$  da equação (58). Então, ficamos com:

$$F_y = ma_y \Rightarrow \quad T - w = 0$$

Neste cálculo,  $F_y$  é a soma de todas as forças mostrada no diagrama ao longo do eixo  $Oy$ . Porém, como a força peso aponta no sentido contrário ao eixo, o colocamos na equação com o sinal negativo. A força  $T$  permanece com sinal positivo, pois aponta no mesmo sentido de  $Oy$ . Como  $ma_y = m \times 0 = 0$ , o somatório das forças é nulo. Daí concluímos que

$$T - 49 = 0$$

$$T = 49 \text{ N.}$$

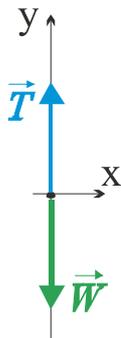
A força do cabo sobre o lustre é  $T = 49 \text{ N}$  e ela aponta verticalmente para cima.

- c) De acordo com a terceira lei de Newton, se a força do cabo sobre o lustre é igual a 49 N. Então o lustre exerce sobre a parte inferior do cabo uma força de reação igual e contrária (Vejam na letra c da figura). O cabo também

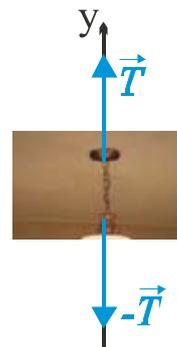
está parado (em equilíbrio). Sendo a sua massa desprezível, uma força de baixo para cima de 49 N deve atuar sobre sua extremidade superior para que a soma vetorial das forças sobre ele seja igual a zero. A tensão no cabo é igual a 49 N.



(a)



(b)



(c)

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

(Sears e Zemansky) Um carro está em repouso sobre uma rampa de um rebocador de carro. O freio do carro está solto e o carro não está engrenado; logo, somente o cabo ligado ao carro e ao rebocador impede o carro de deslizar para baixo ao longo da rampa. Se o peso do carro é  $w$ , achem a tensão no cabo e a força com a qual a rampa empurra os pneus do carro.

### SOLUÇÃO:

Neste caso, o corpo que iremos estudar é o carro. Então o representamos como uma partícula nos eixos coordenados (referencial)  $Oxy$  mostrados na figura abaixo. As forças que consideraremos aqui são o peso do carro  $\vec{w}$ , a força do cabo sobre o carro  $\vec{T}$  e a força que a rampa exerce sobre ele  $\vec{\eta}$  (Vejam a figura abaixo - letra b). A força  $\vec{\eta}$  é chamada de força normal, pois ela é perpendicular ao plano que suporta o carro. Para simplificar os cálculos, consideramos o eixo  $Ox$  na direção em que o carro se moveria, se pudesse.

Observem na figura que o peso forma com a direção  $y$  o mesmo ângulo  $\alpha$  de inclinação da rampa. Usamos esse ângulo para decompor o vetor peso ao longo da direção  $x$  e direção  $y$ . Observem na letra c da figura que o módulo das componentes da força peso são

$$w_x = w \operatorname{sen} \alpha$$

$$w_y = w \operatorname{cos} \alpha .$$

Como o carro está em equilíbrio (parado) a sua aceleração é nula. Aplicamos a equação (58) que representa a segunda lei de Newton nas direções  $x$  e  $y$  do diagrama construído. Ao longo da direção  $x$  temos a força do cabo  $\vec{T}$  (no mesmo sentido) e a componente  $x$  do peso  $\vec{w}_x$  (no sentido contrário). Assim

$$F_x = ma_x \Rightarrow T - w_x = m \times 0 = 0$$

$$T - w \operatorname{sen} \alpha = 0$$

$$T = w \operatorname{sen} \alpha .$$

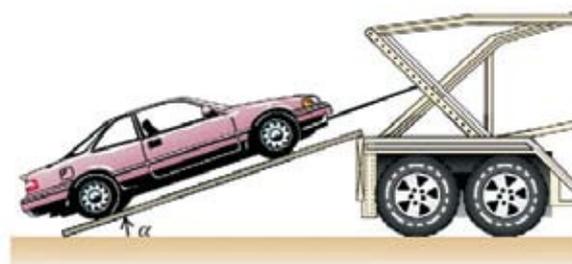
Ao longo da direção  $y$  temos a força normal  $\vec{\eta}$  (no mesmo sentido) e a componente  $y$  do peso  $\vec{w}_y$  (no sentido contrário). Dessa forma

$$F_y = ma_y \Rightarrow \eta - w_y = m \times 0 = 0$$

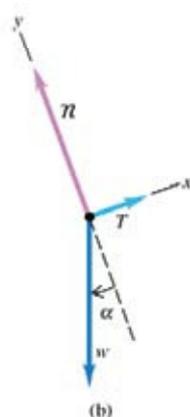
$$\eta - w \operatorname{cos} \alpha = 0$$

$$\eta = w \operatorname{cos} \alpha .$$

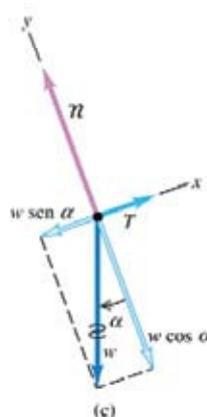
Observem que as escolhas correta dos eixos coordenados e a aplicação correta dos sinais das forças na equação da segunda lei de Newton nos conduzem ao sinal correto na resposta. Lembre-se que  $T$ ,  $w$  e  $\eta$  são os módulos dos vetores e, portanto são sempre positivos. É um erro comum pessoas acharem que o módulo da força normal é sempre igual ao do peso. Observem que neste exemplo eles são diferentes.



(a)



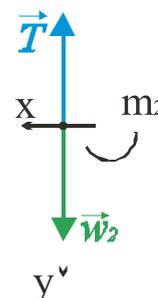
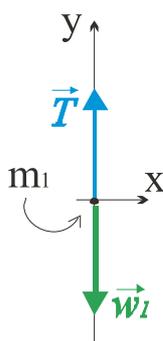
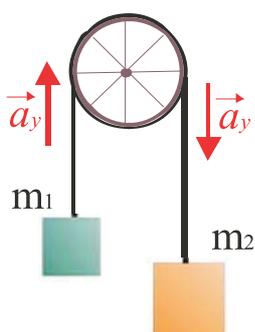
(b)



(c)

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

Consideremos duas massas diferentes, ligadas por uma corda que passa sobre uma polia sem atrito e massa desprezível, conforme figura abaixo. Suponham que  $m_2$  é maior que  $m_1$ . Determinem a tensão na corda e a aceleração das massas.



## SOLUÇÃO:

Para resolver este problema aplicamos a segunda lei de Newton separadamente aos dois corpos de massa  $m_1$  e  $m_2$ . Ambos os corpos se movem na direção vertical, então escolhemos o eixo Oy na vertical para o diagrama dos dois blocos. Como a polia tem massa desprezível ela não é considerada em nosso cálculo. As forças que atuam no bloco de massa  $m_1$  são o peso  $\vec{w}_1$  e a tensão da corda  $T$  que puxa o bloco 1 para cima. Esta mesma tensão  $T$  está atuando no bloco 2, assim como seu peso  $\vec{w}_2$ . A polia serve para mudar a direção da tensão,  $T$ , ao longo de toda a corda sem que seu valor seja alterado.

Analisando a massa dos dois blocos, perceberemos que o sistema não está em equilíbrio. Como  $m_2$  é maior que  $m_1$  sabemos que o bloco 2 acelera para baixo (desce) enquanto o bloco 1 acelera para cima (sobe). Em nosso diagrama escolhemos os eixos  $Oy$  no sentido dessas acelerações. Na figura acima, estão os diagramas para os dois blocos com suas forças correspondentes. Usando a componente  $y$  da segunda lei de Newton, encontramos as equações

$$\begin{cases} F_{1y} = m_1 a_y \Rightarrow T - w_1 = m_1 a_y \\ F_{2y} = m_2 a_y \Rightarrow w_2 - T = m_2 a_y \end{cases}$$

Aqui chamamos  $F_{1y}$  e  $F_{2y}$  os módulos da resultante das forças que atuam (ao longo da direção  $y$ ) nos blocos 1 e 2, respectivamente. A primeira equação corresponde ao diagrama do bloco 1 e a segunda ao diagrama do bloco 2. Como os dois blocos estão rigidamente ligados, o valor da aceleração de ambos será igual,  $a_y$ . Sabendo que peso é igual a massa vezes a aceleração da gravidade, obtemos

$$\begin{cases} T - m_1 g = m_1 a_y \\ m_2 g - T = m_2 a_y \end{cases}$$

O valor da aceleração da gravidade é conhecido,  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$  e as massas dos blocos foram dadas no enunciado do problema como sendo as variáveis  $m_1$  e  $m_2$ . Queremos saber quem são a tensão  $T$  e a aceleração dos blocos  $a_y$ . Temos então acima um sistema de duas equações e duas incógnitas. Podemos isolar a tensão na primeira equação e substituir na segunda. Fazendo isso encontramos a aceleração

$$a_y = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g$$

Substituindo de volta esta aceleração na primeira equação encontramos a tensão

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

Por exemplo, se  $m_2 = 30 \text{ kg}$  e  $m_1 = 15 \text{ kg}$ ,

$$a_y = \frac{30 - 15}{30 + 15} \times 9,8 = 3,27 \text{ m/s}^2$$

$$T = \frac{2 \times 15 \times 30}{15 + 30} \times 9,8 = 196 \text{ N}$$

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Por que ao viajarmos em um ônibus sentimos-nos empurrado para frente, quando o ônibus desacelera, e empurrados para trás quando ele acelera?
2. Considere as seguintes forças, mostradas abaixo, aplicadas a um corpo. Qual é a força resultante aplicada?



3. Classifique como verdadeira ou falsa as afirmações abaixo:
  - (a) massa e peso são as mesmas grandezas físicas com unidades diferentes;
  - (b) massa é propriedade de um único objeto, enquanto o peso resulta da interação entre dois objetos;
  - (c) o peso de um objeto é proporcional à sua massa;

- (d) a massa de um objeto varia com as mudanças no peso local.
- Uma força de 50N é aplicada a um corpo de massa 100 kg que se encontra em repouso. Sendo esta a única força que atua no corpo, qual a velocidade alcançada após 10 s da aplicação da força?
  - Qual a massa de um corpo que, partindo do repouso, atinge uma velocidade de 12 m/s em 20 s? Sabendo que a força aplicada nele tem módulo igual a 30N.
  - Qual a força mínima que deve ser feita para levantar um automóvel com massa 800 kg?
  - Qual a massa de um corpo com peso 12 000 kgf?

## 4.8. Força de Atrito

Até agora consideramos a dinâmica da partícula para corpos sujeitos às forças constantes tanto em módulo como em sentido. Lidamos com diferentes tipos de forças de acordo com as suas “origens”, mas são sempre tratadas de maneira igual na hora de se fazer cálculos ou na hora de se tirar algumas conclusões a respeito de certas situações. Essas forças são:

- Força Peso ( $\vec{w}$ ) que é a força aplicada pelo campo gravitacional da Terra sobre todos os corpos que se encontrem próxima ou na superfície do planeta;
- Força Normal ( $\vec{n}$ ) que é a força que “surge” quando apoiamos qualquer corpo sobre alguma superfície. O nome dela é normal, pois ela sempre aparece formando um ângulo de  $90^\circ$  com a superfície a qual o corpo está sendo apoiado. É fácil identificá-la. Sempre que o corpo estiver apoiado sobre algo, existirá a força normal. Ela será representada por um vetor que sai ou entra na superfície onde o apoio acontece, formando com esta um ângulo de  $90^\circ$ .
- Força de Tensão ( $\vec{T}$ ) que é o nome que damos para as forças que atuam em cabos, cordas ou fios, ou para as forças aplicadas por cabos, cordas ou fios.

Vamos introduzir agora outro tipo de força que surge quando corpos estão deslizando ou tentando deslizar sobre qualquer superfície. Estas forças sempre acabam dificultando os movimentos. Até o momento, nós havíamos desprezado a existência de tais forças, porém elas se apresentam em todos os movimentos. Elas também podem ocorrer em meios fluidos como na água ou no ar. O único lugar onde elas não existem é no vácuo. Sempre que um corpo estiver movendo-se, ou com tendência a movimentar-se, haverá o surgimento das forças de atrito ( $\vec{f}$ ), que serão representadas por vetores apontados no sentido contrário ao do movimento, ou à tendência deste movimento.

A força de atrito está classificada em duas categorias. Quando ela atua sobre corpos que estão deslizando sobre alguma superfície dizemos que este atrito é do tipo **dinâmico**. Quando a força de atrito impede que o corpo deslize, ou seja, neste caso o corpo está ainda em repouso, dizemos que o atrito é do tipo **estático**.

Neste capítulo, estudaremos apenas a força de atrito que ocorre entre corpos sólidos e superfícies secas, mesmo sabendo que o atrito também ocorre em meios viscosos. Porém esse tema será estudado em outra unidade.

### 4.8.1. Atrito Estático

Vamos considerar o corpo representado na figura 35 abaixo. Inicialmente, quando o bloco está parado (em repouso), as únicas forças que atuam sobre ele é a sua força peso, dirigida para baixo e a força normal da superfície sobre o bloco. Nesse momento, não há ainda força de atrito. Para colocar o bloco em movimento ao longo da superfície, aplicamos nele uma força  $\vec{F}$  horizontal. Se o corpo é puxado para direita (como na figura 35), porém não consegue escorregar na superfície, significa que ele recebeu a ação de uma força de atrito contrária a  $\vec{F}$  que impede seu movimento. Essa força é denominada de força de atrito estático,  $\vec{f}_e$ . O seu módulo é igual ao de  $\vec{F}$  enquanto o bloco não se movimenta,  $f_e = F$ . Se aumentarmos a intensidade da força aplicada  $\vec{F}$ , a intensidade da força de atrito  $\vec{f}_e$ , aumenta de forma a termos sempre  $f_e = F$ . Se a força  $\vec{F}$  continuar a aumentar, vai chegar

um ponto onde o atrito estático não irá suportar e o bloco começará a se movimentar. Neste ponto limite, a força de atrito estática atinge o seu valor máximo, denominado de força de atrito estática máxima:

$$f_{e\max} = \mu_e \cdot \eta . \quad (62)$$

Nesta equação,  $\eta$  é o módulo da força normal e  $\mu_e$  é o coeficiente de atrito estático. Esta igualdade apenas é válida no limite do início do movimento.

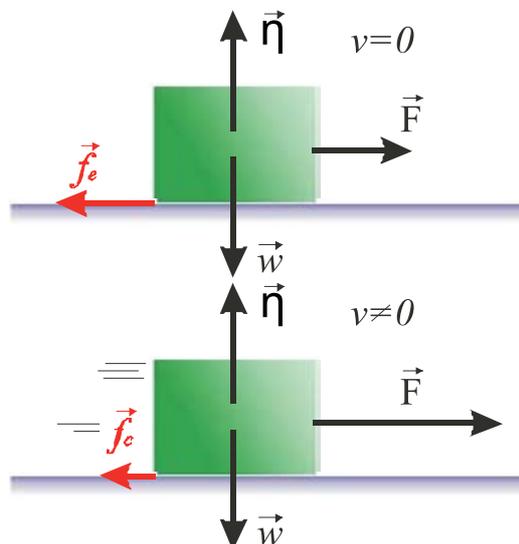


Figura 35: Um bloco se movimenta quando a força aplicada  $\vec{F}$  supera as forças de atrito.

#### 4.8.2 Atrito Dinâmico (ou Cinético)

Se o corpo que estávamos estudando na figura 35 começa a escorregar na superfície de apoio, significa que a força aplicada  $\vec{F}$ , é agora maior do que a força de atrito. Por causa disso, o bloco começa a acelerar. A força de atrito continua a dificultar o movimento, porém sua intensidade é menor. Esta nova força de atrito, quando os corpos estão em movimento, é denominada força de atrito dinâmico ou força de atrito cinético,  $\vec{f}_c$ . Ao contrário do atrito estático, a força de atrito dinâmico é constante e seu módulo é dado por:

$$f_c = \mu_c \cdot \eta . \quad (63)$$

Aqui,  $\mu_c$  é o coeficiente de atrito cinético. Tanto  $\mu_e$  quanto  $\mu_c$  são constantes adimensionais e geralmente para um dado par de superfícies de  $\mu_e > \mu_c$ . Os valores reais desses coeficientes dependem da natureza das duas superfícies em contato.

Notem que as equações (62) e (63) são relações entre o módulo de uma força normal com uma força de atrito, cujas direções são sempre perpendiculares entre si. Lembre-se que a direção da força de atrito é sempre contrária ao movimento (velocidade) ou a intenção do movimento.

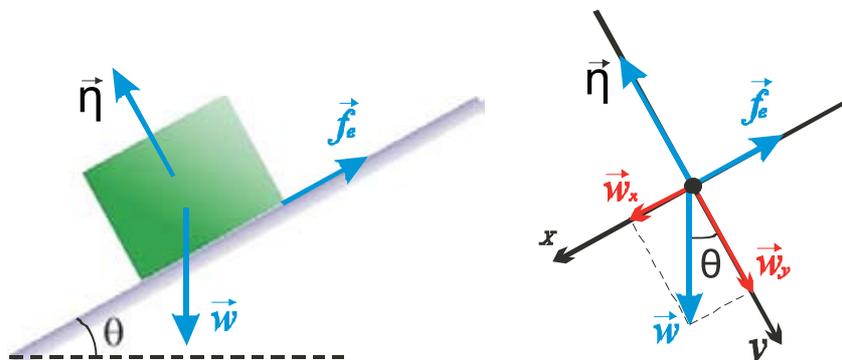


#### INDICAÇÃO DE LEITURA

(<http://www.algossobre.com.br/fisica/forcas-de-atrito.html>)  
Neste site podemos aprender um pouco mais sobre a natureza das forças de atrito e muitos outros temas importantes de física.

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

Um bloco está em repouso sobre um plano inclinado que forma um ângulo  $\theta$  com a horizontal, conforme a figura abaixo. Aumentando o ângulo de inclinação, verifica-se que para o valor  $\theta_c$  (ângulo crítico) o bloco começa a escorregar. Qual é o coeficiente de atrito estático entre o bloco e o plano?



### SOLUÇÃO:

Resolvemos o problema considerando as forças que atuam sobre o bloco. Sobre ele atuam a força peso, a força normal e a força de atrito. Como o bloco está inicialmente parado e com uma tendência a descer pela rampa, a força de atrito será a estática e seu sentido será ao longo da rampa, de baixo para cima como na figura acima.

Representamos o bloco como uma partícula no diagrama à direita. Esse diagrama mostra os eixos considerados. Observem que colocamos o eixo  $Ox$  ao longo da direção para onde o bloco aceleraria, se pudesse e não na direção horizontal. Neste diagrama, representamos com uma flecha azul, as forças que realmente existem sobre o bloco. As flechas vermelhas são os vetores componentes da força peso.

Aplicamos as equações (58) da segunda lei de Newton nas direções  $x$  e  $y$  e obtemos

$$\begin{aligned} F_x = m.a_x &\Rightarrow w_x - f_e = m.0 = 0 \\ F_y = m.a_y &\Rightarrow \eta - w_y = m.0 = 0 \end{aligned}$$

Aqui consideramos positivas as forças ao longo dos eixos e negativas as forças contrárias aos eixos. Como o bloco não está em movimento, a sua aceleração é nula e as componentes do peso são

$$\begin{aligned} w_x &= w.\text{sen}\theta \\ w_y &= w.\text{cos}\theta \end{aligned}$$

Quando aumentamos a inclinação  $\theta$  da rampa, a componente  $x$  do peso aumenta. É essa componente que provocará o movimento do bloco quando tiver uma intensidade suficiente para vencer o atrito que também está aumentando. Quando a força de atrito atinge o valor máximo,  $f_{e\text{max}} = \mu_e.\eta$ , encontramos o ângulo crítico. Neste momento as equações acima se tornam

$$\begin{cases} w_x - f_{e\text{max}} = w.\text{sen}\theta - \mu_e.\eta = 0 \\ \eta - w_y = \eta - w.\text{cos}\theta = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_e.\eta = w.\text{sen}\theta \\ \eta = w.\text{cos}\theta \end{cases}$$

Combinando estas equações encontramos

$$\mu_e = \tan\theta_c$$

Logo, um método simples para determinar o coeficiente de atrito estático entre duas superfícies consiste em medir o ângulo de inclinação para o qual o escorregamento se inicia.

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

Um caminhão se move ao longo de uma estrada reta horizontal, com velocidade  $v_0$ . Se o coeficiente de atrito estático entre os pneus e a estrada for  $\mu_e$ , qual a mínima distância em que o automóvel pode parar?

### SOLUÇÃO:

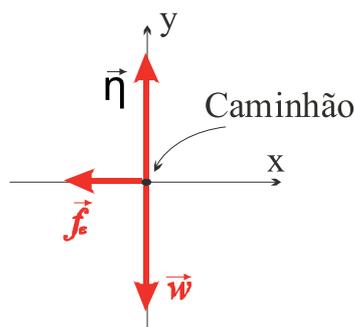
As forças que atuam no caminhão considerado como partícula, estão indicadas na figura abaixo. Consideramos que o caminhão se move no sentido positivo de  $Ox$ . Admitindo que a força de atrito estática seja constante, o movimento é uniformemente desacelerado. Neste caso, a força de atrito aponta no sentido contrário a  $Ox$ . Aplicando a segunda lei de Newton

$$\begin{cases} F_x = m.a_x \Rightarrow \\ F_y = m.a_y \Rightarrow \end{cases} \quad \begin{cases} -f_e = m.a_x \Rightarrow \\ \eta - w = m.0 \Rightarrow \end{cases} \quad \begin{cases} -\mu_e \eta = m.a_x \\ \eta = w \end{cases}$$

Observem que o caminhão não tem movimento ao longo da direção  $y$ , assim  $a_y = 0$ . A partir dessas equações e sendo  $w = mg$  encontramos que a aceleração do caminhão é  $a_x = -\mu_e g$ . O sinal negativo na aceleração indica que o caminhão está freando. Substituindo esta aceleração na equação de Torricelli temos

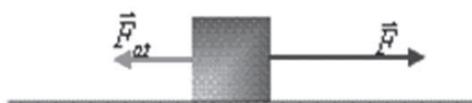
$$\begin{aligned} v^2 &= v_0^2 + 2a\Delta x \\ 0 &= v_0^2 + 2(-\mu_e \cdot g)(x-0) \\ x &= \frac{v_0^2}{2\mu_e \cdot g} \end{aligned}$$

Em que  $x$  é a posição em que o caminhão irá parar. Neste resultado,  $v_0$ ,  $\mu_e$  e  $g$  são conhecidos. Para chegarmos a esse resultado, consideramos a posição inicial do caminhão em  $x_0 = 0$  e a velocidade final do caminhão nula.



## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

8. Qual o coeficiente de atrito de um bloco de 10 kg que alcança 2 m/s em um deslocamento de 10 m, partindo do repouso? Sendo que a força que é aplicada a ele é 10 N.

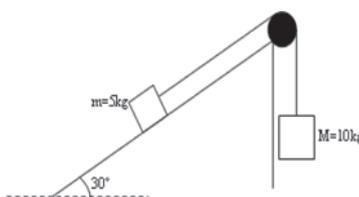


9. Uma força  $F$  é aplicada a um bloco de 15 kg que desliza sobre uma superfície onde o coeficiente de atrito cinético é 0,25. O corpo tem aceleração constante de  $1 \text{ m/s}^2$ . Qual a força aplicada no corpo?
10. Dois móveis, M e N, ligados por uma corda de peso desprezível, deslocam-se sobre um plano, sob a ação de uma força de 15 N aplicada na direção do deslocamento.

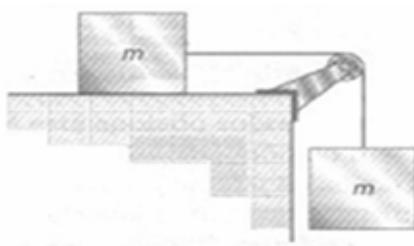


Não há atrito entre M e o plano, porém o coeficiente de atrito de escorregamento entre o corpo N e o plano vale 0,2. As massas de M e N são respectivamente 1 kg e 3 kg. Adote  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ . Qual a aceleração do sistema em  $\text{m/s}^2$ ?

11. Qual a aceleração do sistema a seguir, sendo que o coeficiente de atrito dinâmico do plano é igual a 0,2?

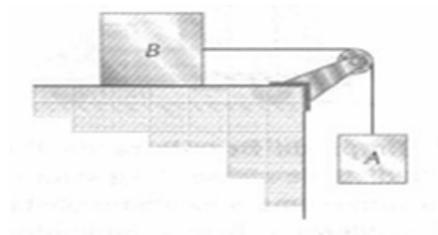


12. Dois blocos idênticos, ambos com massa  $m$ , são ligados por um fio leve e flexível.



Adotar  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ . A polia é leve e o coeficiente de atrito do bloco com a superfície é  $\mu = 0,1$ . Qual a aceleração dos blocos?

13. No sistema representado abaixo, o corpo A de massa 3,0 kg, está em movimento uniforme. A massa do corpo B é de 10 kg. Adote  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ . Quanto vale o coeficiente de atrito dinâmico entre o corpo B e o plano sobre o qual o bloco se apóia?



#### 4.9. Força centrípeta

No capítulo 3, vimos que se um corpo se move com velocidade (escalar) constante  $v$  em uma trajetória circular de raio  $r$ , a sua aceleração é sempre dirigida para o centro da circunferência e possui um módulo igual a  $\frac{v^2}{r}$ . Esta é a aceleração centrípeta do corpo  $\vec{a}_c$ , que varia sua direção continuamente durante o movimento.

Sabemos que todo corpo acelerado deve estar sobre a influência de uma força  $\vec{F}$  e de acordo com a segunda lei de Newton,  $\vec{F} = m\vec{a}$ . Nesta equação,  $\vec{F}$  é a soma de todas as forças que atuam no corpo. Portanto, se o corpo está em movimento circular uniforme, podemos estar certos que a força resultante sobre ele aponta na direção de

sua aceleração e neste caso, para o centro da circunferência. Sendo a aceleração do corpo, a aceleração centrípeta, o módulo da força é

$$F = ma_c$$

$$F = \frac{mv^2}{r} \quad (64)$$

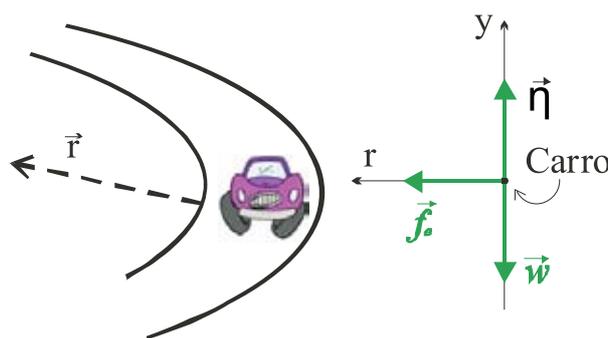
Esta força, como apresentada na equação (64), é, algumas vezes, chamada de força centrípeta. O estudante deve ficar atento ao fato de que a equação (64) não define um novo tipo de força. A variável  $F$  nesta equação pode ser qualquer força ou um somatório de vários tipos de forças, tais como: a tensão de fio, a força gravitacional, o atrito, etc.

Quando um menino gira uma pedra presa por um barbante. A força sobre a pedra que produz o movimento circular uniforme é a tensão. Neste caso, a força centrípeta é a tensão no barbante. Um satélite que descreve sua órbita circular com velocidade constante ao redor da Terra está sujeito à força gravitacional da Terra. Esta força gravitacional é a força centrípeta neste caso. Vocês conseguem percorrer uma trajetória circular uniforme com uma bicicleta, graças à força de atrito. Se não fosse o atrito, vocês não conseguiriam fazer a curva. Neste caso, a força de atrito é a força centrípeta.

O procedimento para resolver problemas de movimento circular uniforme utilizando as leis de Newton é semelhante ao que temos feito até agora nos exemplo anteriores. Apenas iremos modificar um pouco a escolha dos eixos coordenados (referencial). Como a direção da aceleração no movimento circular não é constante, vamos congelar um instante do movimento para representar nosso diagrama. Escolhemos então um dos eixos ao longo da aceleração, que nesse caso é a centrípeta,  $\vec{a}_c$ . Este eixo, então, que aponta para o centro da circunferência será chamado de  $Or$ . Veremos isso na prática em alguns problemas.

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

Um automóvel faz uma curva circular, plana e horizontal (não-compensada), de raio 190 m. Sabendo-se que o coeficiente de atrito estático entre os pneus e a pista é  $\mu_e = 0,40$ , qual a velocidade máxima com que esse automóvel pode fazer a curva sem derrapar?



### SOLUÇÃO:

A inércia de um carro em movimento produz nele uma tendência a seguir em linha reta. Porém a força de atrito existente entre os pneus do carro e a estrada atua no carro permitindo que ele faça uma curva. Esta força de atrito aponta para dentro da curva. Sendo a curva uma circunferência e o movimento do carro uniforme, a força de atrito aponta exatamente para o centro e a aceleração do carro é a aceleração centrípeta  $a_c = \frac{v^2}{r}$ .

Construímos o diagrama de forças para o carro na posição em que ele se encontra na figura. Neste caso, o eixo  $Or$  aponta para a esquerda e não possui prolongamento para a direita, como pode ser visto na figura. As forças que atuam no carro são o peso, a normal e a força de atrito estático. Consideramos o atrito estático, pois queremos o limite em que não há escorregamento.

Aplicando a segunda lei de Newton a direção  $y$  encontramos  $\eta = w = mg$ , uma vez que não há aceleração,  $a_y = 0$  nesta direção. Neste problema, não temos o eixo  $Ox$ . Então, tomamos a segunda lei de Newton na direção  $r$ . A equação é

$$F_r = m.a_r \Rightarrow f_e = m.a_c.$$

A aceleração que temos ao longo do eixo  $Or$  é a aceleração centrípeta e a força é o atrito. Neste caso, o limite para não haver escorregamento nos fornece a velocidade máxima que o carro pode ter

$$\mu_e \eta = m \cdot \frac{v_{\max}^2}{r}$$

$$\mu_e mg = m \cdot \frac{v_{\max}^2}{r}$$

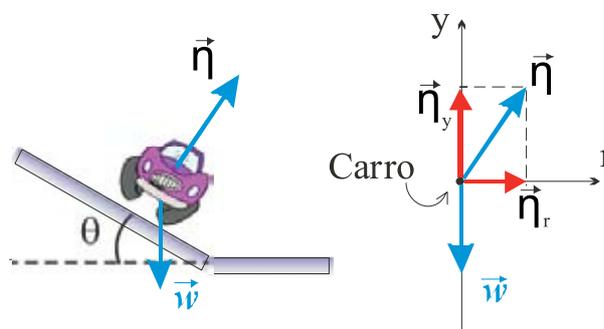
$$v_{\max} = \sqrt{g\mu_e r}$$

$$v_{\max} = \sqrt{9,8 \times 0,40 \times 190} = 27,3 \text{ m/s.}$$

Se o carro tiver uma velocidade maior que essa, ele sobrar na pista.

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

Qual deve ser o ângulo de inclinação da pista de um autódromo (pista compensada) para que os motoristas possam fazer curvas circulares de 70 m de raio com velocidade de até 72 km/h sem depender da força de atrito.



## SOLUÇÃO:

Na prática, não podemos confiar que o atrito lateral seja suficiente para permitir que um carro faça a curva. Por esse motivo as estradas têm curvas compensadas como mostra a figura. O efeito da compensação é inclinar a força normal para o centro de curvatura da estrada, de forma que a sua componente radial forneça a força necessária para o carro fazer a curva.

Construímos o diagrama de forças colocando agora o eixo  $Or$  para a direita. As forças que atuam no carro são o peso e a normal (Neste problema desprezamos o atrito) representadas em azul. As flechas vermelhas são as componentes da força normal,  $\vec{\eta}_r$  e  $\vec{\eta}_y$ . Aplicando a segunda lei na direção  $y$  temos

$$F_y = m.a_y \Rightarrow \eta_y - w = m.a_y$$

$$\eta \cos\theta - mg = m.a_y$$

Onde usamos  $\eta_y = \eta \cos\theta$  e como o carro não acelera ao longo desta direção,  $a_y = 0$ . Daí encontramos

$$\cos\theta = \frac{mg}{\eta}$$

Escrevendo a segunda lei de Newton na direção  $r$ , temos

$$F_r = m.a_r \Rightarrow \eta_r = m.a_c$$

$$\eta \cdot \text{sen}\theta = m \frac{v^2}{r}$$

$$\text{sen}\theta = \frac{mv^2}{\eta r}$$

Aqui usamos o fato de que  $\eta_r = \eta \cdot \text{sen}\theta$  e que a aceleração ao longo da direção  $r$  é a aceleração centrípeta. Dividindo o resultado encontrado da direção  $r$  pelo resultado da direção  $y$  encontramos

$$\frac{\text{sen}\theta}{\cos\theta} = \tan\theta = \frac{v^2}{gr}$$

$$\tan\theta = \frac{20^2}{9,8 \times 70} = 0,58$$

$$\theta = \tan^{-1}(0,58) = 30,25^\circ.$$

O arco cuja tangente é 0,58 corresponde a  $30,25^\circ$ . Esse é o ângulo mínimo que a inclinação da pista deve ter para o carro fazer a curva sem a necessidade de atrito se sua velocidade for 72 km/h (= 20 m/s).

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

14. Qual a força centrípeta que um carro de massa 600 kg atinge, ao percorrer uma curva de raio 100 m a uma velocidade de 15 m/s<sup>2</sup>?
15. Qual deve ser o coeficiente de atrito estático entre a estrada e os pneus para que o carro do exercício anterior não derrape?

## RESPOSTAS

2. 2 N, Horizontal para a esquerda; 3. F,V,V,F; 4. 5 m/s; 5. 50 kg; 6. 8 000 N; 7. 1 224 kg; 8.  $\mu_c = 0,08$ ; 9. 52,5 N; 10. 4,56 m/s<sup>2</sup>; 11. 4,4 m/s<sup>2</sup>; 12. 4,4 m/s<sup>2</sup>; 13.  $\mu = 0,30$ ; 14. 1 350 N; 15. 0,230

## 5. TRABALHO E ENERGIA CINÉTICA

### 5.1. Introdução

Um problema fundamental da dinâmica, em Física, é determinar a como se moverá uma partícula quando se conhece as forças que atuam sobre ela. Temos resolvido este problema considerando, até aqui, o caso especial de uma força constante. Com isso, vimos na segunda lei de Newton que a partícula irá possuir uma aceleração de módulo também constante.

O procedimento utilizado para determinar o movimento de uma partícula submetida a forças variáveis nos leva aos conceitos de **Trabalho** e **Energia Cinética**. Em física dizemos que a Energia, de uma forma ampla, possibilita a execução de Trabalho. O tema central desta seção será o desenvolvimento do teorema fundamental para a mecânica: o Teorema do Trabalho-Energia Cinética.

### 5.2. Trabalho Realizado por uma Força Constante

A palavra Trabalho, na Física, possui um significado diferente do que usualmente utilizado em seu cotidiano em uma linguagem comum. O trabalho, na Física é sempre relacionado a uma força que desloca uma partícula ou um corpo. Dizemos que uma força  $\vec{F}$  realiza trabalho quando atua sobre um determinado corpo que está em movimento. A partir dessa descrição podemos dizer que só há trabalho sendo realizado se houver deslocamento, caso contrário o trabalho realizado será nulo. Assim, se uma pessoa sustenta um objeto, sem deslocá-lo, ela não está realizando nenhum trabalho sobre o corpo.

**Matematicamente definimos o trabalho realizado pela força sobre uma partícula como sendo o produto da componente da força na direção do movimento pela distância  $d$  que a partícula percorreu naquela direção.** Na figura 36 uma força constante  $\vec{F}$ , inclinada de um ângulo  $\phi$  com o eixo  $Ox$ , atua sobre uma partícula cujo deslocamento naquele eixo é  $d$ . De acordo com a definição, representando por  $W$  o trabalho realizado pela força constante durante esse deslocamento temos que

$$W = (F \cos \phi) d \quad (65)$$

Nesta equação,  $(F \cos \phi)$  é o módulo da componente da força  $\vec{F}$  na direção do deslocamento. Naturalmente outras forças devem agir sobre a partícula que se move, como por exemplo, o peso e a força normal. Porém a equação anterior se refere somente ao trabalho realizado pela força  $\vec{F}$ . O trabalho realizado por outras forças deve ser calculado separadamente. O trabalho total é a soma de todos os trabalhos realizados sobre a partícula.

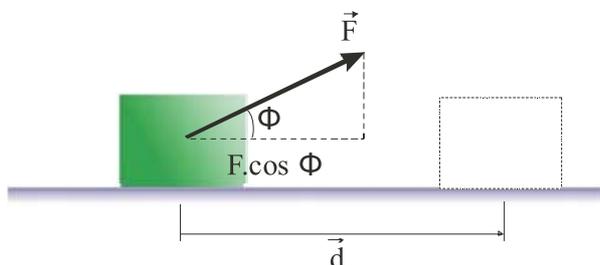


Figura 36: Força  $\vec{F}$  inclinada atua em uma partícula produzindo um deslocamento  $\vec{d}$  na horizontal.

O trabalho é uma grandeza escalar, embora seja definido a partir de duas grandezas vetoriais: força e deslocamento. Lembrando da definição de produto escalar vista no início desse módulo podemos escrever a equação (65) em notação da álgebra vetorial como

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} \quad (66)$$

em que o ponto indica o produto escalar de dois vetores. Esta é a forma mais geral para se calcular o trabalho realizado por uma força sobre uma partícula em movimento.

Observem na figura 36 que se o ângulo  $\phi$  for nulo, significa que a força atua sobre a partícula na mesma direção do deslocamento e o trabalho realizado por  $\vec{F}$  é simplesmente  $fd$ , uma vez que  $\cos 0^\circ = 1$ . Quando  $\phi = 90^\circ$  a força não tem componente na direção do deslocamento. Essa força, portanto não realiza trabalho sobre a partícula. Por exemplo, a força peso na figura 36 forma um ângulo de  $90^\circ$  com o deslocamento. Logo, ela não realiza trabalho sobre a partícula. A força centrípeta que age sobre um corpo em movimento circular não realiza trabalho sobre ele, pois ela é sempre perpendicular à trajetória. Está claro também na equação (65) que nenhuma força realiza trabalho sobre um corpo que não se move, pois seu deslocamento é nulo.

O trabalho realizado por uma partícula pode ser positivo ou negativo. Ele será positivo quando a componente da força na direção do movimento ( $F \cos \phi$ ) tem a mesma direção do deslocamento. Neste caso, dizemos que a força favorece o movimento naquela direção. O trabalho realizado por uma força será negativo quando a componente da força ( $F \cos \phi$ ) na direção do movimento possuir direção contrária ao deslocamento. Neste caso dizemos que a força está trabalhando contra o movimento. Matematicamente, se o ângulo entre a força e o deslocamento for, por exemplo, de  $180^\circ$  na figura 36, o trabalho realizado pela força será  $W = -Fd$ , pois  $\cos 180^\circ = -1$ . A força de atrito é um exemplo de uma força que sempre realiza trabalho negativo, pois esta força é sempre oposta ao movimento.

A unidade de trabalho no SI (Sistema Internacional de Unidades) é 1 newton-metro. Onde

$$1 \text{ N.m} = 1 \text{ joule} = 1 \text{ J}$$

Porém, representado o trabalho no sistema inglês de unidades, podemos encontrar

$$1 \text{ J} = 10^7 \text{ erg.}$$



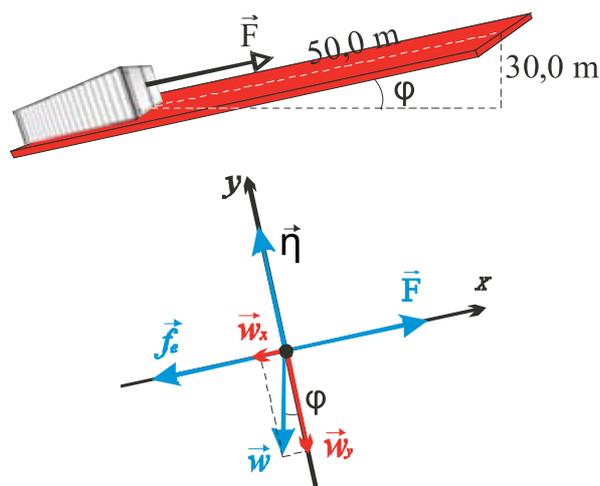
### VOCÊ SABIA?

*(<http://rived.mec.gov.br/atividades/fisica/energia/atividade4/atividade4.htm>) Neste site vocês irão calcular um trabalho realizado por uma força aplicada em ângulos diferentes de uma forma divertida.*

### EXERCÍCIO RESOLVIDO

Um contêiner de massa igual a 3 toneladas deve ser elevado da base ao topo de um declive com 50,0 m de comprimento e 30,0 m de altura em relação ao solo por uma força  $\vec{F}$  paralela ao declive. Considerando que o coeficiente de atrito cinético entre o contêiner e o plano igual a 0,20 e que ele se desloca com velocidade constante, calculem o trabalho:

- Realizado pelo peso do contêiner;
- Realizado pela força normal;
- Realizado pela força de atrito;
- Realizado pela força  $\vec{F}$ ;
- Total realizado sobre o contêiner.

**SOLUÇÃO:**

Para responder estas questões necessitamos inicialmente conhecer todas as forças que atuam sobre o contêiner. No diagrama de forças estão representadas todas elas através de flechas azuis. As flechas vermelhas são as componentes do peso ao longo dos eixos coordenados. O contêiner está subindo a rampa, logo seu deslocamento é ao longo da rampa no sentido para cima, ou seja, forma um ângulo  $\phi$  com a direção horizontal. Para calcular esse ângulo, usamos as informações contidas na figura e a relação do seno trigonométrico.

$$\text{sen}\phi = \frac{30,0}{50,0} = 0,6 \quad \Rightarrow \quad \phi = \text{sen}^{-1}(0,6) = 36,87^\circ$$

- a) O trabalho realizado pela força peso  $W_w$  é a componente do peso ao longo do deslocamento ( $w_x$ ) vezes o deslocamento ( $d$ ).

$$W_w = -w_x d = -(w \text{sen}\phi) d$$

$$W_w = -mg(\text{sen}\phi) d = -3000 \times 9,8 \times 0,6 \times 50$$

$$W_w = -882000 \text{ J}$$

O sinal negativo indica que o trabalho é realizado contra o movimento do contêiner. Cuidado com a representação das variáveis para não confundir a letra  $W$  maiúscula usada para representar o trabalho, com a letra  $w$  minúscula usada para representar o peso.

Poderíamos achar o mesmo resultado usando a equação (66) para o trabalho e tomando o ângulo formado entre o peso e o deslocamento que pode ser facilmente visualizado no diagrama de forças:

$$W_w = \vec{w} \cdot \vec{d} = wd \cos(\phi + 90^\circ)$$

$$W_w = mgd \cos(126,87^\circ)$$

$$W_w = 3000 \times 9,8 \times 50 \cos(126,87^\circ) = -882000 \text{ J}$$

- b) Aplicando a segunda lei de Newton no diagrama de forças construído, verificamos que como o contêiner não possui aceleração ao longo do eixo  $Oy$ , a força normal tem um módulo igual a componente  $y$  do peso. Sendo assim

$$\eta = w_y = w \cos\phi = mg \cos\phi$$

$$\eta = 3000 \times 9,8 \times \cos(36,87^\circ) = 23519,97 \text{ N}$$

Logo, o trabalho realizado pela força normal é

$$W_{\eta} = \vec{\eta} \cdot \vec{d} = \eta d (\cos 90^\circ) = 0$$

Onde  $90^\circ$  é o ângulo entre a força normal e o deslocamento. Como era de esperar, como não existe componente da força normal ao longo do movimento, o seu trabalho é nulo.

c) A força de atrito cinético do contêiner é  $f_c = \mu_c \eta = 0,20 \times 23519,97 \approx 4704\text{N}$ . Assim, o trabalho realizado por ela é

$$W_f = \vec{f}_c \cdot \vec{d} = f_c d (\cos 180^\circ)$$

$$W_f = 4704 \times 50 \times (\cos 180^\circ) = -235200 \text{ J}$$

Tentem justificar por que o sinal encontrado aqui é negativo.

d) Aplicamos agora a segunda lei de Newton ao diagrama de forças para encontrar a força  $\vec{F}$  aplicada ao contêiner. Para isso analisamos a direção  $x$ . Como o contêiner se movimenta com velocidade constante, sua aceleração ao longo do eixo  $Ox$  é nula. Logo, pela equação (58) temos

$$F - f_c - w_x = 0$$

$$F - f_c - mg(\text{sen}\phi) = 0$$

$$F = 4704 + 3000 \times 9,8 \times 0,6 = 22344 \text{ N}$$

O trabalho realizado por essa força é

$$W_F = \vec{F} \cdot \vec{d} = Fd (\cos 0^\circ)$$

$$W_F = 22344 \times 50 = 1117200 \text{ J}$$

e) O trabalho total  $W$  realizado sobre o contêiner é a soma de todos os trabalhos.

$$W = W_w + W_{\eta} + W_f + W_F$$

$$W = -882000 + 0 - 235200 + 1117200 = 0 \text{ J.}$$

O trabalho total realizado sobre a partícula é nulo.

### 5.3. Trabalho Realizado por uma Força Variável

Na seção anterior, vimos como calcular o trabalho realizado por uma força constante sobre uma partícula. Vamos generalizar um pouco mais esse conceito para calcular o trabalho realizado por uma força variável. Faremos isso graficamente.

Considerem inicialmente que uma força constante apontando na direção  $x$  esteja atuando sobre uma partícula. O gráfico mostrado na figura 37 mostra uma curva da força que atua sobre uma partícula em função da posição. Consideramos que a partícula se move em linha reta e sua posição é dada pela função  $x$ . Podemos observar nesta curva que a força se mantém constante durante toda a trajetória da partícula.

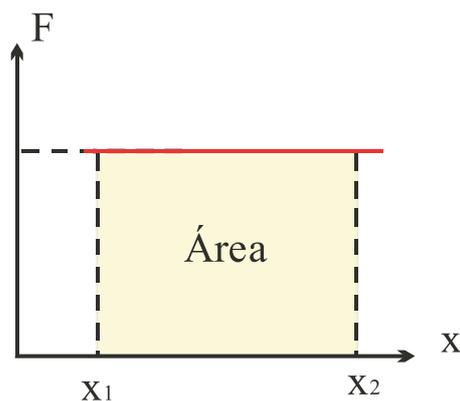


FIGURA 37: Gráfico de uma força constante em função da posição de uma partícula.

Se a partícula se deslocou de  $x_1$  até  $x_2$ , o trabalho realizado pela força sobre a partícula é  $W = Fd$ , onde  $d = x_2 - x_1$  foi o deslocamento da partícula. Podemos observar na figura 37 que esse trabalho é exatamente a área marcada sob a curva. Assim podemos dizer que o trabalho realizado por uma força sobre uma partícula é igual a área compreendida entre a curva e o eixo das abscissas em um gráfico da força versus a posição.

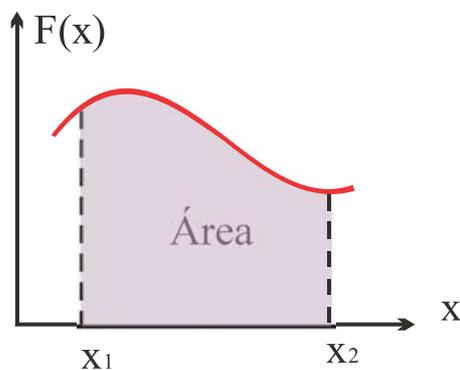


FIGURA 38: Gráfico de uma força variável em função da posição de uma partícula.

Considerem agora que a força que está agindo sobre a partícula, possui um módulo  $F(x)$  que varia com a posição da partícula. Esta força que também aponta na direção  $x$  está representada no gráfico da figura 38. Para encontrar o trabalho realizado por esta força sobre a partícula que se move de  $x_1$  para  $x_2$  necessitamos calcular a área sob a curva mostrada na figura 38. Como vocês devem ter aprendido no curso de cálculo, a integral de  $F(x)$  em relação a  $x$ , de  $x_1$  a  $x_2$ , corresponde a essa área. Logo o trabalho realizado pela força sobre a partícula ao deslocá-la de  $x_1$  para  $x_2$  é dado por

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx \quad (67)$$

Onde  $F(x)$  é a função que representa a força e  $dx$  é um elemento infinitesimal do deslocamento da partícula.

Um exemplo de uma força que varia de intensidade de acordo a posição é a força elástica. Considerem uma mola presa horizontalmente a uma parede. Suponham que a outra extremidade direita da mola coincida com a posição  $x = 0$ , quando a mesma está em seu estado relaxado (Figura 39a). Considerem o eixo  $Ox$  no sentido para a direita. Quando nós distendemos ou comprimimos a mola, de forma que seu extremo se desloque para a posição  $x$ , percebemos que ela exerce uma força elástica sobre nós que será

$$F = -kx \quad (68)$$

Sendo  $k$  uma constante denominada constante elástica da mola. Na figura 39b vemos que esta força é uma função linear da posição. A equação (68) é conhecida como a Lei de Hooke. O sinal negativo nesta equação indica

que a força da mola é sempre oposta ao deslocamento de sua extremidade, a partir da origem. Quando a mola estiver distendida,  $x > 0$ , a força é negativa indicando que ela aponta no sentido oposto ao eixo Ox. Quando a mola estiver comprimida,  $x < 0$ , a força é positiva indicando que ela aponta no sentido do eixo Ox.

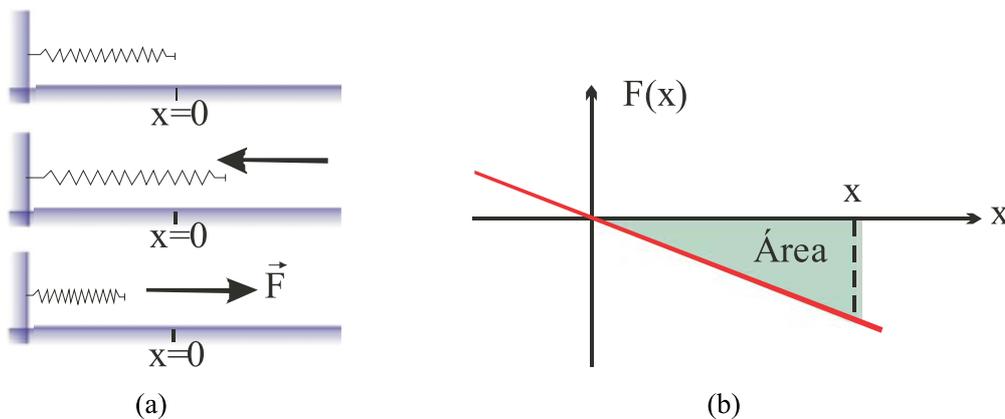


FIGURA 39: a) Uma mola presa na parede no seu estado relaxado, distendido e comprimido. b) Gráfico da força variável de uma mola em função da posição da extremidade livre da mesma.

De acordo com a equação (68), a unidade no SI para a constante de mola é newton/metro (N/m).

Consideremos que uma mola passou de um estado inicial, com extremidade na posição  $x_1$  para um estado final, com extremidade na posição  $x_2$ . O trabalho realizado pela força elástica da mola é calculado substituindo a equação (68) na equação (67), como segue

$$W = \int_{x_1}^{x_2} (-kx) dx = -k \int_{x_1}^{x_2} x dx$$

$$W = \left[ -\frac{k}{2} x^2 \right]_{x_1}^{x_2} = \left( -\frac{1}{2} k \right) (x_2^2 - x_1^2)$$

$$W = \left( \frac{1}{2} k x_1^2 - \frac{1}{2} k x_2^2 \right) \quad (69)$$

Este é o trabalho realizado pela força da mola. Se considerarmos que o estado inicial da mola corresponde ao estado relaxado, fazemos  $x_1 = 0$  e obtemos

$$W = -\frac{1}{2} k x^2 \quad (70)$$

Onde o  $x$  representa a posição final da extremidade livre da mola.

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

Uma pessoa pesando 600 N sobe em uma balança de mola contendo uma mola dura para se pesar. No equilíbrio, a mola está comprimida 1,0 cm sob a ação do seu peso. Calculem a constante de mola e o trabalho realizado pela força da mola durante sua compressão.

### SOLUÇÃO:

No equilíbrio, quando a pessoa está sobre a balança, a resultante das forças que atuam nessa pessoa é nula. Sendo assim, a segunda lei de Newton nos afirma que a força da mola sobre a pessoa é igual ao seu peso, 600 N. Daí usando a lei de Hooke

$$F = -kx \quad \Rightarrow \quad 600 = -k(-0,01)$$

$$k = 60000 \text{ N/m}$$

Onde fizemos  $x = -1,0\text{cm} = -0,01\text{m}$  e o sinal negativo indica que a mola foi comprimida.

Então, pela equação (70) encontramos que o trabalho realizado pela mola é

$$W = -\frac{1}{2} kx^2 = -\frac{1}{2} 60000 \times (-0,01)^2$$

$$W = -3,0 \text{ J}$$

O sinal negativo aqui significa que a força da mola realizou um trabalho contrário ao deslocamento.

#### 5.4. Energia Cinética, Teorema do Trabalho-Energia

O trabalho total realizado sobre uma partícula é a soma dos trabalhos realizados por todas as forças que atuam sobre ela. Isto significa que o trabalho total sobre uma partícula é o trabalho realizado pela força resultante sobre a partícula. De acordo com a segunda lei de Newton, se a força resultante for nula, a partícula não possuirá aceleração e se ela for diferente de zero, a partícula estará acelerada.

Vamos considerar que uma partícula está submetida a várias forças, cuja força resultante  $F_R(x)$  é diferente de zero e aponta na direção do eixo Ox. Suponham também que esta partícula se move ao longo da direção Ox. O trabalho realizado pela força resultante ao deslocar a partícula da posição  $x_1$  até a posição  $x_2$  é

$$W_T = \int_{x_1}^{x_2} F_R(x) dx \quad (71)$$

De acordo com a segunda lei de Newton,  $F_R(x) = ma$  e a aceleração pode escrever-se como

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx} v \quad (72)$$

Portanto

$$W_T = \int_{x_1}^{x_2} F_R(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} mv \frac{dv}{dx} dx$$

$$W_T = m \int_{v_1}^{v_2} v dv = \frac{1}{2} mv_2^2 - \frac{1}{2} mv_1^2 \quad (73)$$

A grandeza  $\frac{1}{2} mv^2$  é denominada de **energia cinética** da partícula:

$$K = \frac{1}{2} mv^2 \text{ (Definição de energia cinética)} \quad (74)$$

Assim como o trabalho, a energia cinética é uma grandeza escalar. Ela depende somente da massa e do módulo da velocidade da partícula e não da direção do movimento.

Podemos agora interpretar a equação (73) em termos do trabalho e da energia cinética. O primeiro termo do membro direito na equação (73) é a energia cinética final da partícula (depois do deslocamento) e o segundo termo é a energia cinética inicial (antes do deslocamento). Logo, a equação (73) nos mostra que **o trabalho total realizado pela força resultante sobre uma partícula é igual à variação da energia cinética da partícula**:

$$W_T = K_2 - K_1 = \Delta K \quad (\text{Teorema do trabalho-energia}) \quad (75)$$

Observem na equação (75) que se a energia cinética da partícula aumenta durante um movimento o trabalho total é positivo. Se a energia cinética da partícula diminui o trabalho total é negativo.

De acordo com as equações (74 e 75), a energia cinética e o trabalho devem possuir as mesmas unidades. Logo, joule (J) é a unidade SI tanto para o trabalho quanto para a energia cinética.

Apesar de termos deduzido a equação (75), considerando uma força e um deslocamento ao longo da direção Ox, esse resultado é válido para casos mais gerais onde a força poderá ter qualquer direção e a trajetória da partícula poderá ser curvilínea.

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

A força da gravidade pode ser considerada constante a pequenas distâncias acima da superfície da Terra. Neste caso, suponham que um corpo cai de uma altura  $h = 10,0$  m, partindo do repouso. Qual a energia cinética um momento antes dele tocar o solo?

### SOLUÇÃO:

Vamos utilizar o teorema do trabalho-energia para resolver este problema. Considerando que somente a força da gravidade (peso) atua sobre o corpo, calcularemos o trabalho total realizado sobre ele.

$$W_T = \vec{w} \cdot \vec{d} = wd(\cos\theta)$$

Onde  $\vec{w}$  é a força peso,  $d$  é o deslocamento do corpo e  $\theta$  é o ângulo formado entre o peso e o deslocamento. Daí, fazendo  $d = h$  temos

$$W_T = mgh(\cos 0^\circ) = mgh$$

A velocidade inicial do corpo era  $v_1 = 0$ , então a variação da energia cinética do corpo foi

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 - 0$$

Comparando as duas equações anteriores

$$W_T = \Delta K$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv_2^2$$

$$v_2 = \sqrt{2gh}$$

$$v_2 = \sqrt{2 \times 9,8 \times 10} = 14 \text{ m/s}$$

Vocês poderiam encontrar o mesmo resultado utilizando a equação de movimento de Torricelli.

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

Um bloco que pesa 4,0 N escorrega sobre uma mesa horizontal lisa com velocidade de 1,2 m/s. Ele pára após comprimir uma mola colocada em sua trajetória. Quanto foi a compressão da mola sabendo que sua constante elástica vale 0,37 N/m?

**SOLUÇÃO:**

A variação da energia cinética da mola é

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = 0 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$\Delta K = -\frac{w}{2g}v_1^2$$

Aqui usamos o fato que  $m = \frac{w}{g}$ . A única força que atua na direção do movimento, sobre o bloco, é a força elástica da mola durante a sua compressão. Logo, o trabalho total realizado sobre este bloco é o trabalho da força da mola (equação 70):

$$W_T = -\frac{1}{2}kx^2$$

Usando a equação 70 juntamente com o teorema do trabalho-energia (equação 75) encontramos:

$$-\frac{1}{2}kx^2 = -\frac{w}{2g}v_1^2$$

$$x = \sqrt{\frac{w}{kg}v_1^2}$$

$$x = \sqrt{\frac{4,0}{0,37 \times 9,8}} 1,2^2 \approx 1,3 \text{ m.}$$

**5.5. Potência**

Muitas vezes é mais importante saber o tempo gasto para se realizar certo trabalho, do que o próprio trabalho, sobretudo para engenheiros. Para se escavar uma mina nós podemos usar dinamite. Porém, a mesma quantidade de energia utilizada pode ser fornecida por palitos de fósforos, neste caso o tempo gasto seria muito maior. Sendo assim, definimos uma grandeza útil que relaciona o trabalho realizado com o tempo gasto, a **potência**.

Define-se potência como a taxa em que o trabalho é realizado. A potência média liberada é o quociente do trabalho total realizado pelo intervalo de tempo, ou seja:

$$P_m = \frac{W}{t} \quad (76)$$

Assim, a potência instantânea liberada pelo agente é

$$P = \frac{dW}{dt}. \quad (77)$$

Quando a potência for constante em qualquer instante, temos que  $P = P_m$ . Sua unidade no Sistema Internacional (SI) é o Watt = 1 joule/segundo (1 W = 1 J/s) em homenagem a James Watt, inventor da máquina a vapor.

Podemos representar a potência em termos de força aplicada ao movimentarmos um corpo em termos da força aplicada sobre ele e de sua velocidade. Se considerarmos uma partícula movendo-se em uma dimensão, a potência torna-se:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{Fdx}{dt} = F\left(\frac{dx}{dt}\right) = Fv.$$

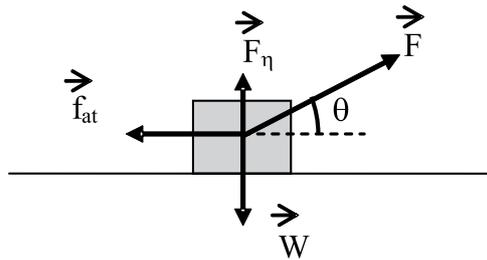
No caso mais geral do movimento em três dimensões, podemos estender esse resultado para

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

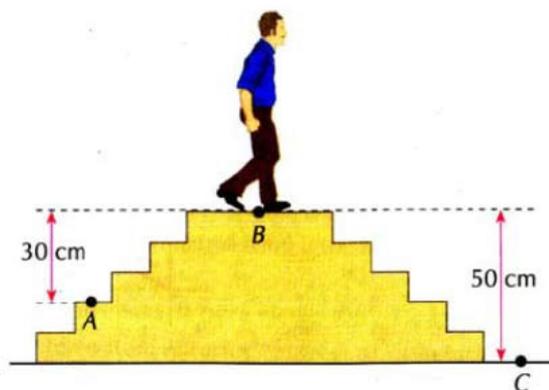
Vocês já devem ter observado em sua conta de energia a quantidade de quilowatt-hora (kWh) gasto em sua residência. Ao contrário do que muitos pensam, essa unidade corresponde a trabalho realizado e não a potência. De acordo com a definição de potência, o trabalho é igual a potência vezes o tempo. Assim, um quilowatt-hora é o trabalho realizado por um agente em uma hora liberando uma potência constante de  $1 \text{ kW} = 1000 \text{ W}$ .

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

- Um bloco parte da posição A e atinge a posição B sob ação de um sistema de forças, conforme mostra a figura. Sendo  $F = 50 \text{ N}$ ,  $\cos \theta = 0,8$ ,  $w = 70 \text{ N}$ ,  $F_{\eta} = 40 \text{ N}$ ,  $f_{\text{at}} = 10 \text{ N}$  e  $d = 5 \text{ m}$ , determine :
  - o trabalho que cada força realiza no deslocamento AB;
  - o trabalho da força resultante nesse deslocamento.

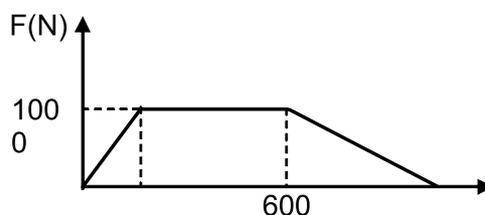


- Um carro de massa  $M = 600 \text{ kg}$  viaja com velocidade  $v = 72 \text{ km/h}$  numa estrada plana e horizontal, quando, de repente, seu motor quebra e o motorista coloca o mesmo em “ponto morto”. Desta forma, o carro ainda percorre uma distância de  $3 \text{ km}$  até parar, pelo efeito combinado da inércia e do atrito. Quais as intensidades da aceleração, em  $\text{m/s}^2$ , do coeficiente de atrito, da força resistiva resultante, em newtons, suposta constante, que atua no carro e o faz parar e ainda, qual o trabalho, em Joules, realizado por esta força? Considerar  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .
- Um homem de massa  $70 \text{ kg}$  sobe uma escada, do ponto A ao ponto B, e depois desce do ponto B ao ponto C, conforme indica a figura. Dado  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ . Determine o trabalho realizado pelo peso do homem
  - Desde o ponto A até o ponto B,
  - Desde o ponto B até o ponto C,
  - Desde o ponto A até o ponto C.

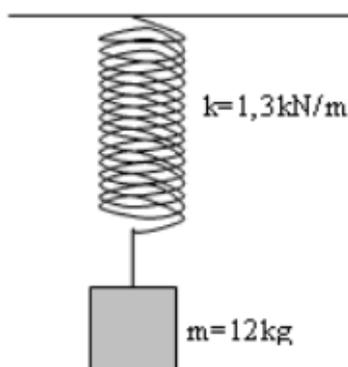


- Os átomos que constituem os sólidos estão ligados entre si por forças interatômicas. O trabalho necessário para arrancar um átomo de uma barra de ouro é de aproximadamente  $3,75 \text{ eV}$ . Atualmente é possível arrancar do metal um único átomo. Esse átomo desliga-se dos outros, quando é puxado a  $4,0 \times 10^{-10} \text{ m}$  acima da superfície da barra. Considere  $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$ .
  - Calcule a força necessária para arrancar um único átomo de ouro da barra.
  - Uma seção transversal da barra de ouro tem aproximadamente  $1,6 \times 10^{15} \text{ átomos/cm}^2$ . Calcule a força necessária para romper uma barra de ouro com área transversal de  $2 \text{ cm}^2$ .

5. Uma corda é usada para baixar verticalmente um bloco de massa  $m$  até uma distância  $d$  com uma aceleração constante igual a  $g/5$ . Calcule o trabalho realizado pela tensão da corda sobre o bloco.
6. Um carro de massa igual a 1000 kg move-se sem atrito em trajetória retilínea, a partir do repouso. O gráfico da força motora na própria direção do movimento é mostrado na figura. Determine:
  - a) A aceleração instantânea do carro quando se encontra a 400 m da origem,
  - b) O trabalho da força  $F$  atuando no carro no deslocamento de 200 m a 1000 m,
  - c) O trabalho da força  $F$  no deslocamento de 0 m a 1000 m.



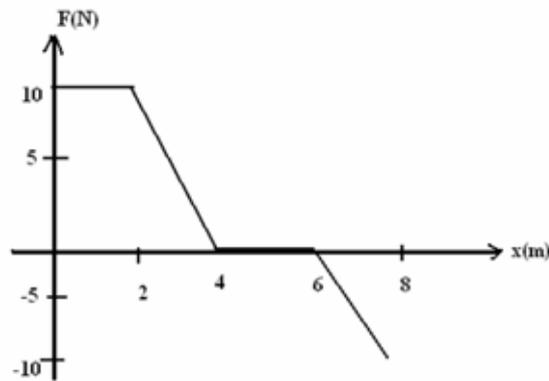
7. Uma mola tem constante elástica  $k = 2,5 \text{ kN/m}$ . Quando ela for comprimida de 12 cm, qual será a força elástica dela?
8. Um corpo entra em equilíbrio quando a força resultante sobre ele for nula. Sendo:



Qual será a deformação na mola quando o sistema estiver em equilíbrio?

9. Uma mola de constante elástica 100 N/m sofre uma deformação de 60 cm. Calcule o trabalho da força elástica em módulo, na deformação de 20 cm à 40 cm.
10. Sob ação de uma força resultante constante  $F$  um corpo de massa  $m = 4,0 \text{ Kg}$  adquire, a partir do repouso, uma velocidade escalar de 10 m/s. Qual o trabalho realizado por  $F$ ?
11. Um bloco de massa  $m = 0,20 \text{ kg}$  repousa sobre um plano inclinado que forma um ângulo  $\theta = 37^\circ$  com a horizontal. O bloco é subitamente impulsionado, paralelamente ao plano, por uma marretada. Ele para após percorrer, plano acima, uma distância de 0,45 m, a partir de sua posição inicial. Sabendo que o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e o plano é  $\mu_c = 0,50$  e que a interação da marreta com o bloco somente ocorre no instante inicial, determine:
  - a) O trabalho realizado pela força de atrito durante o deslocamento,
  - b) O trabalho realizado pela força de peso durante o deslocamento,
  - c) A velocidade do bloco imediatamente após a marretada.
12. A energia cinética de um corpo de 5 kg de massa é igual a 1000 J. De que altura este corpo deveria cair para que sua energia cinética atingisse este valor.
13. Um foguete de massa igual a  $5 \times 10^4 \text{ kg}$  deve atingir uma velocidade de escape de 11,2 km/s para que possa fugir a atração terrestre. Qual deve ser a quantidade mínima de energia necessária para levar o foguete desde o repouso até esta velocidade?

14. Um projétil de 50 g possui velocidade inicial de 500 m/s. O projétil perfura um bloco de madeira e penetra 12 cm antes de parar. Calcule a força média exercida pelo projétil sobre o bloco de madeira.
15. Um automóvel se desloca em linha reta com velocidade constante igual a 60 km/h. Calcule: (a) a variação da energia cinética em 100 m, (b) o trabalho total da força resultante sobre o automóvel em 100 m, (c) o trabalho da força motriz sabendo que durante 100 m de percurso a força motriz vale 7000 N.
16. Um bloco de 4,0 kg move-se em linha reta sobre uma superfície horizontal sem atrito sob a influência de uma força que varia em função da posição de acordo com o gráfico indicado na figura abaixo.
- Calcule o trabalho realizado pela força quando o bloco parte da origem e atinge a posição  $x = 8$  m,
  - Se a velocidade da partícula ao passar pela origem era de 3 m/s, calcule o módulo da velocidade da partícula quando ela passar pelo ponto  $x = 8$  m.



17. Uma garota de massa igual a 50 kg sobe uma rampa, cuja elevação total é de 4 m em 3 s. Qual é a potência média que ela desenvolve?
18. Uma cachoeira despeja um volume  $V$  igual a  $1,2 \times 10^4 \text{ m}^3$  de água em cada intervalo de tempo  $t = 2$  s. A altura da cachoeira vale  $h = 100$  m.
- Obtenha uma expressão para o cálculo da potência teórica disponível.
  - Supondo que  $4/5$  dessa potência possa ser transformada em eletricidade por meio de um sistema gerador hidroelétrico, calcule a potência elétrica gerada. A densidade da água vale  $d = 1 \text{ g/cm}^3$ .
19. Um cavalo puxa horizontalmente uma carreta com uma força de 200 N. A força forma um ângulo de  $30^\circ$  acima da horizontal. A carreta se move com velocidade de 8 km/h. Calcule a potência média desenvolvida pelo cavalo.
20. Um foguete com massa igual a  $7 \times 10^4$  kg adquire uma velocidade de  $1,0 \times 10^4$  km/h em 1,2 minutos após o lançamento. Calcule a potência média desenvolvida pelo foguete neste intervalo de tempo.
21. Uma força atua sobre uma partícula de 2,5 kg de tal forma que a posição da partícula varia em função do tempo de acordo com a expressão:  $x = 3t^4 - 2t^3 - t^2$ , onde  $x$  é expresso em metros e  $t$  em segundos. Calcule:
- O trabalho realizado pela força nos 3 segundos iniciais,
  - A potência instantânea para  $t = 2,0$  s.
22. Um corpo de massa  $m$  acelera-se uniformemente, partindo do repouso até a velocidade  $v_f$  no tempo  $t_f$ .
- Determine o trabalho realizado sobre o corpo, em função de  $t$ ,  $v_f$  e  $t_f$ .
  - Obtenha a potência instantânea fornecida ao corpo em função do tempo.
  - Qual a potência fornecida instantaneamente para  $t=3$  s para um corpo de 1.500 kg que é acelerado de 0 a 100 km/h em 10 s.
23. Uma locomotiva possui uma potência máxima de  $1,5 \times 10^6$  W. Esta locomotiva acelera um trem com um 1 m/s de velocidade até 2,5 m/s, com potência máxima, num tempo de 30 s.
- Desprezando a força de atrito, calcule a massa do trem.

b) Ache a velocidade do trem em função do tempo durante o intervalo.

## Respostas

1. (a)  $T_F = 200 \text{ J}$ ,  $T_n = T_w = 0$ ,  $T_r = -50 \text{ J}$ ; (b)  $T_{\text{total}} = 150 \text{ J}$ ; 2.  $a = 6,67 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$ ,  $f_{\text{at}} = 40,02 \text{ N}$ ,  $\mu = 6,81 \times 10^{-3}$ ,  $T_r = 1,20 \times 10^5 \text{ J}$ ; 3. (a)  $-205,8 \text{ J}$ , (b)  $+205,8 \text{ J}$ , (c)  $0 \text{ J}$ ; 4. (a)  $1,5 \times 10^{-9} \text{ N}$ , (b)  $4,8 \times 10^6 \text{ N}$ ; 5.  $-4 \text{ mgd/5}$ ; 6. (a)  $1 \text{ m/s}^2$ , (b)  $6 \times 10^5 \text{ J}$ , (c)  $7 \times 10^5 \text{ J}$ ; 7.  $300 \text{ N}$ ; 8.  $9 \text{ cm}$ ; 9.  $6 \text{ J}$ ; 10.  $200 \text{ J}$ ; 11. (a)  $-0,35 \text{ J}$ , (b)  $-0,53 \text{ J}$ , (c)  $1,23 \text{ m/s}$ ; 12.  $20,4 \text{ m}$ ; 13.  $3,14 \times 10^{12} \text{ J}$ ; 14.  $5,2 \times 10^4 \text{ N}$ ; 15. (a)  $0$ , (b)  $0$ , (c)  $7 \times 10^5 \text{ J}$ ; 16. (a)  $20 \text{ J}$ , (b)  $4,4 \text{ m/s}$ ; 17.  $653,3 \text{ w}$ ; 18. (a)  $P = dgh V/t$ , (b)  $4,7 \times 10^9 \text{ W}$ ; 19.  $385 \text{ W}$ ; 20.  $5,6 \times 10^9 \text{ J}$ ; 21. (a)  $8,7 \times 10^4 \text{ J}$ , (b)  $2,0 \times 10^4 \text{ W}$ ; 22. (a)  $\frac{mv_f^2}{2t_f^2} t^2$ , (b)  $\frac{mv_f^2}{t_f^2} t$ , (c)  $3,47 \times 10^4 \text{ W}$ ; 23. (a)  $1,7 \times 10^7 \text{ kg}$  (b)  $(1 + 0,18t)^{1/2}$ .

## 6. LEI DE CONSERVAÇÃO DA ENERGIA MECÂNICA

### 6.1. Introdução

Existe um fato, ou se desejarem, uma lei, que governa todos os fenômenos naturais conhecidos. Não existe nenhuma exceção a esta lei e ela é exata. A lei chama-se Conservação da Energia.

Ela nos diz que existe certa quantidade, que chamamos energia, que não muda com as alterações de estado que a natureza realiza. Isto quer dizer que se, inicialmente, calcularmos o valor total da energia de um sistema isolado, e depois de alguma alteração ou transformação que ocorra no sistema, calcularmos outra vez o valor total da energia, este valor será o mesmo que o inicial. Caso contrário, existirá uma troca de energia e o sistema não será isolado.

Nos sistemas reais, existe geralmente uma conversão irreversível em tipos diferentes de energia. No capítulo anterior definimos um tipo de energia associado à velocidade das partículas, a energia cinética. Neste capítulo, introduziremos o conceito de energia potencial e finalmente a lei de conservação de energia. Porém, antes vamos definir o que são forças conservativas e não-conservativas.

### 6.2. Forças conservativas e não-conservativas (Dissipativas)

Definimos como forças conservativas aquelas que quando atuam num sistema, modificando-lhe a configuração, fazendo-o regressar à configuração inicial, readquire também a energia cinética inicial. Isto significa que as forças conservativas conservaram a capacidade que o sistema tinha de realizar trabalho, e daí o seu nome: **forças conservativas**.

As forças que atuam num sistema são não-conservativas ou dissipativas quando, ao deixarem de realizar trabalho, o sistema ou não regressa à configuração inicial ou regressa a ela com energia cinética diferente da que tinha no princípio. Neste caso, as forças não-conservativas não conservaram a capacidade que o sistema tinha de realizar trabalho.

Para identificar se uma força é conservativa ou não, podemos realizar dois testes. Estes testes são equivalentes, de modo que, se a força satisfizer a um deles, estará satisfazendo ao outro.

1º)

Uma força é conservativa se o trabalho total realizado por ela para levar um sistema de um estado inicial até um estado final depende apenas dos pontos inicial e final e não do caminho percorrido entre esses dois pontos. Ou seja, se o trabalho for o mesmo para qualquer trajetória entre os dois pontos, a força é conservativa. Caso contrário, ela é dissipativa.

2º)

Uma força é conservativa se o trabalho que ela realiza sobre uma partícula que faz uma trajetória de ida e volta for nula. Caso contrário, a força é dissipativa.

Vamos aplicar os testes anteriores em algumas forças que estudamos até agora e descobrir quais delas são conservativas e não-conservativas.

#### 6.2.1. A Força Gravitacional é Conservativa?

Aplicaremos o 1º teste a força gravitacional para descobrir se ela é conservativa ou dissipativa. Para isso, consideremos que uma partícula se desloque da posição 1 até a posição 2, ao longo de duas trajetórias,  $a$  e  $b$ , como mostradas na figura. Na trajetória  $a$ , a partícula parte da posição 1 e segue inicialmente na horizontal (deslocamento  $s$ ). Depois, sobe na vertical até a posição 2 (deslocamento  $h$ ). Na trajetória  $b$ , a partícula parte de 1 e segue uma trajetória reta até a posição 2 (deslocamento  $d$ ). A força gravitacional (peso) aponta sempre para baixo em qualquer das trajetórias.

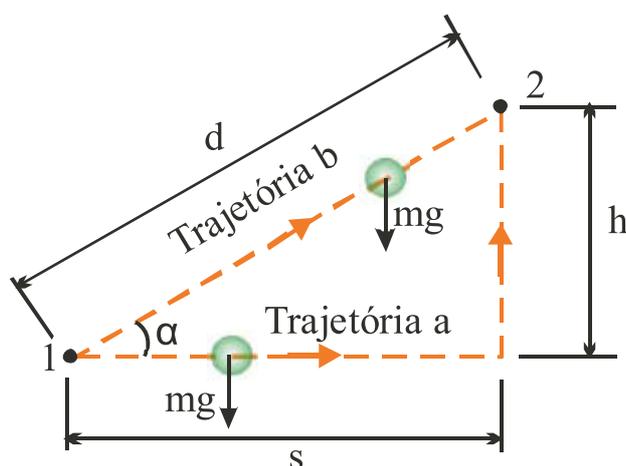


Figura 40: Uma partícula se deslocando no plano da posição 1 até a posição 2 ao longo das trajetórias  $a$  e  $b$ .

O trabalho realizado  $W_a$  pelo peso ao longo da trajetória  $a$  da partícula será a soma do trabalho ao longo da horizontal  $W_h$  mais o trabalho realizado ao longo da vertical  $W_v$ . Calculando esses dois trabalhos encontramos

$$W_a = W_h + W_v \quad (78)$$

$$W_a = \vec{w} \cdot \vec{s} + \vec{w} \cdot \vec{h} \quad (79)$$

$$W_a = ws(\cos 90^\circ) + wh(\cos 180^\circ) = 0 + mgh(-1) \quad (80)$$

$$W_a = -mgh \quad (81)$$

Usamos na equação (80) os ângulos  $90^\circ$  quando a partícula se movia na horizontal e  $180^\circ$  que ele se movia na vertical. Esses são os ângulos formados entre o peso e o vetor deslocamento. O trabalho realizado  $W_b$  pelo peso ao longo da trajetória  $b$  da partícula será:

$$W_b = \vec{w} \cdot \vec{d} = wd [\cos(90^\circ + \alpha)] \quad (82)$$

$$W_b = wd [-\text{sen}(\alpha)] \quad (83)$$

Aqui usamos a relação trigonométrica  $\cos(A+B) = (\cos A \cdot \cos B) - (\text{sen} A \cdot \text{sen} B)$  e o fato de ser o ângulo entre o peso e o deslocamento igual a  $(90^\circ + \alpha)$  na trajetória  $b$ . Observando a figura temos que  $\text{sen} \alpha = \frac{h}{d}$ . Substituindo na equação:

$$W_b = -wd \left[ \frac{h}{d} \right] \quad (84)$$

$$W_a = -mgh \quad (85)$$

Observem nos resultados (equação 81 e 85) que o trabalho realizado pelo peso para levar a partícula da posição 1 até a posição 2 pelas trajetórias  $a$  e  $b$  foi o mesmo,  $W_a = W_b$ . Isto significa dizer que a força peso (gravitacional) é uma força conservativa.

### 6.2.2 A Força Elástica é Conservativa?

Vamos aplicar o 2º teste para verificar se a força de uma mola é conservativa ou dissipativa. Para isso considerem uma mola presa horizontalmente em uma parede (como na figura 39). No estado inicial, a mola está relaxada com sua extremidade livre em  $x = 0$ . Suponham que um bloco se movimentando livremente se choca com a extremidade

da mola, comprimindo-a até a posição  $x = -d$ . Em seguida, o bloco é empurrado de volta pela força da mola, até a posição  $x = 0$ , quando se desprende dela. Calcularemos o trabalho total realizado pela força da mola  $W_e$  sobre o bloco durante este percurso de ida e volta, partindo da posição  $x = 0$ , indo até a posição  $x = -d$  e retornando para a posição  $x = 0$ .

O trabalho total realizado pela mola sobre o bloco será o trabalho de ida  $W_i$  mais o trabalho de volta  $W_v$ . Neste caso, usando a equação (69) obtemos:

$$W_i = \frac{1}{2}k(0)^2 - \frac{1}{2}k(-d)^2 = -\frac{1}{2}kd^2 \quad (86)$$

$$W_v = \frac{1}{2}k(-d)^2 - \frac{1}{2}k(0)^2 = \frac{1}{2}kd^2 \quad (87)$$

Somando esses dois resultados:

$$W_e = W_i + W_v \quad (88)$$

$$W_e = -\frac{1}{2}kd^2 + \frac{1}{2}kd^2 = 0 \quad (89)$$

Logo, se o trabalho total realizado pela força da mola sobre o bloco enquanto este fazia um percurso de ida e volta é igual à zero, a força da mola (elástica) é uma força conservativa.

### 6.2.3. A Força de Atrito é Conservativa?

Suponhamos que no exemplo bloco-mola que usamos na seção anterior, estivesse também atuando sobre o bloco a força de atrito cinética  $\vec{f}_c$ . Este atrito pode ser da resistência do ar ou do contato do bloco com a superfície por onde ele se movimentava. É claro que considerando o atrito, a compressão da mola seria menor. Vamos calcular então, trabalho total realizado pelo atrito sobre o bloco naquele percurso de ida e volta.

Sabendo que a força de atrito cinética é igual a  $f_c = \mu_c \eta$  e sempre oposta ao movimento, o ângulo entre o deslocamento do bloco e a força de atrito é igual a  $180^\circ$ . Logo, os trabalhos realizados pela força de atrito durante a ida  $W_i$  e volta  $W_v$  serão:

$$W_i = f_c d (\cos 180^\circ) = -\mu_c \eta d \quad (90)$$

$$W_v = f_c d (\cos 180^\circ) = -\mu_c \eta d \quad (91)$$

Observem que os dois trabalhos foram iguais e o trabalho total realizado pela força de atrito sobre o bloco no percurso de ida e volta será  $W_f = W_i + W_v = -2\mu_c \eta d$ . Como o trabalho total não foi nulo, a força de atrito não é uma força conservativa. Isto significa dizer que o atrito é uma força que dissipa a energia do sistema. Por isso, ela é chamada de não-conservativa ou dissipativa.

## 6.3. Energia Potencial

Vimos que as forças conservativas conservam a capacidade que o sistema tinha inicialmente de realizar trabalho. Quando uma mola é comprimida por um bloco em movimento fazendo-o parar, por exemplo, sua força possibilita que o bloco readquira sua energia cinética perdida. Se não houver atrito (força dissipativa), a energia cinética inicial do bloco retorna ao seu valor inicial.

Quando vocês tiram uma pedra de massa  $m$  do solo e a largam de certa altura, vocês sabem que a força da gravidade realizará trabalho sobre esta pedra fazendo com que sua energia cinética aumente enquanto ela cai.

Nessas circunstâncias (atuando apenas forças conservativas), é razoável introduzir o conceito de **energia de estado** ou **energia potencial U**. Esta energia está associada ao estado do sistema (ou a configuração das partículas). Isto significa dizer que quando o sistema está em certo estado, ele possui uma energia potencial que pode ser

convertida em outro tipo de energia, neste caso, em energia cinética. Assim, quando a energia cinética  $k$  de um sistema variar  $\Delta K$ , sua configuração (por exemplo, a posição do bloco no sistema bloco-mola) varia também, então a energia potencial  $U$  do sistema deve variar de um valor igual e oposto, de forma que a soma das duas variações seja nula. Em outras palavras, a variação da energia cinética de um sistema é compensada por uma variação em sua energia potencial. Daí:

$$\Delta K + \Delta U = 0 \quad (92)$$

$$\Delta K = -\Delta U \quad (93)$$

Não podemos associar a energia potencial a uma força não-conservativa tal como o atrito, pois a energia cinética do sistema em que atua a força de atrito, nunca retorna ao seu valor inicial.

Vamos encontrar uma função,  $U$ , para a energia potencial de um sistema, considerando o teorema do trabalho-energia  $\Delta K = W_T$ . Onde  $\Delta K = W_T$  é o trabalho total resultante das forças que atuam sobre a partícula quando ele se move da posição  $x_1$  até a  $x_2$ . Para simplificar, consideramos que apenas uma força  $F(x)$  atua no sistema. Sendo esta força conservativa, podemos combinar o teorema do trabalho-energia com a equação (93) resultando

$$\Delta U = -W_T \quad (94)$$

$$\Delta U = -\int_{x_1}^{x_2} F(x)dx \quad (95)$$

Como a força é conservativa, o trabalho (ou a integral) somente dependerá do ponto inicial 1 e do ponto final 2. Assim, usando a equação (95) encontramos uma função  $U(x)$  que representa a energia potencial do sistema em cada estado. Podemos reescrever a equação como segue:

$$U(x_2) - U(x_1) = -\int_{x_1}^{x_2} F(x)dx \quad (96)$$

Usualmente costuma-se escolher um ponto de referência  $x_1$  e atribuir a ele uma energia potencial nula  $U(x_1) = 0$ . Dessa forma, fazendo  $x_2 = x$  obtemos:

$$U(x_2) = -\int_{x_1}^{x_2} F(x)dx + U(x_1) \quad (97)$$

$$U(x) = -\int_{x_1}^{x_2} F(x)dx \quad (98)$$

A equação (42) nos diz que em sistemas em que atuam apenas forças conservativas, a variação da energia cinética produz uma variação igual e oposta na energia potencial. Podemos reescrever esta equação considerando que o sistema sofre uma transformação de um estado inicial "i" para um estado final "f" quando as energias sofrem estas variações. Desta forma a equação se torna

$$(K_f - K_i) + (U_f - U_i) = 0 \quad (99)$$

$$(K_i + U_i) = (K_f + U_f) \quad (100)$$

Observem nesta equação que a soma das energias do sistema antes dele sofrer qualquer transformação é igual à soma das energias após ocorrerem às transformações. A equação (92) assim como a equação (100) são formas preliminares de anunciar o princípio de conservação de energia. Falaremos sobre isso mais adiante. A soma da energia cinética com a energia potencial do sistema é chamada de energia mecânica total,  $E = K + U$ .

Na equação (100),  $K_i$  e  $U_i$  são a energia cinética e potencial no estado inicial; e  $K_f$  e  $U_f$  são a energia cinética e potencial no estado final. A equação (100) nos diz que a energia mecânica total de qualquer sistema em que atuem apenas forças conservativas é constante. Desta forma podemos escrever

$$E = K + U = \text{Constante} \quad (101)$$

### 6.3.1. Energia potencial gravitacional

Calculemos agora a energia potencial no movimento retilíneo próximo à superfície da Terra. Encontraremos a energia potencial gravitacional associada à força peso.

O movimento retilíneo considerado aqui possui direção vertical para cima ao longo do eixo Oy. A partícula se desloca de uma posição  $y_1$  até uma posição  $y_2$ , onde  $y_2 > y_1$ . Como a força peso aponta para baixo consideraremos  $F(y) = -mg$ , uma constante. A energia potencial dada pela equação (96) será:

$$U(y_2) - U(y_1) = -\int_{y_1}^{y_2} F(y) dy \quad (102)$$

$$U(y_2) - U(y_1) = -\int_{y_1}^{y_2} (-mg) dy = mg(y_2 - y_1) \quad (103)$$

Se considerarmos o ponto de referência como sendo na superfície da Terra,  $y_1 = 0$ , onde  $U(y_1) = 0$ , obtemos:

$$U(y) = mgy \quad (104)$$

A energia potencial gravitacional será então  $mgy$  para qualquer partícula a uma altura  $y$  acima da superfície da Terra.

### 6.3.2 Energia Potencial Elástica

Vamos agora considerar uma força elástica, como a da mola. Se a mola está relaxada na posição horizontal, sua compressão (ou distensão) é  $x_0 = 0$ . Considerem este estado como sendo o ponto de referência no qual a energia potencial elástica é nula,  $U(x_0) = 0$ . Quando a mola é comprimida (ou distendida) de uma quantidade  $x$  ela armazena energia potencial. Esta energia potencial pode ser calculada pela equação (96) como segue:

$$U(x) - U(x_0) = -\int_{x_0}^x F(x) dx \quad (105)$$

A força da mola é dada pela lei de Hooke  $F(x) = -kx$ . Daí obtemos:

$$U(x) - 0 = -\int_0^x (-kx) dx \quad (106)$$

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2 \quad (107)$$

Esta equação nos fornece a energia potencial armazenada em uma mola quando ela é comprimida (ou distendida) de uma quantidade  $x$  em relação ao seu estado de relaxamento.

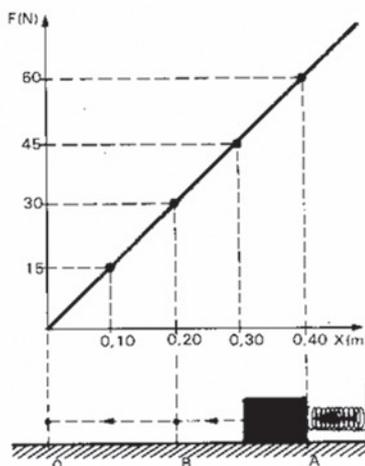
### VOCE SABIA?

Todo e qualquer sistema físico tende “naturalmente” a um estado de menor energia potencial. É por esse motivo que uma mola retorna ao estado relaxado quando está livre e é também por isso que uma bola cai no chão quando ela é largada de certa altura.

### EXERCÍCIOS PROPOSTOS

1. Um pacote de açúcar com massa de 5 kg está sobre um armário da cozinha da sua casa. O armário tem 1,8 m e você mora no 12º andar de um prédio em que o piso está a 30,0 m do solo. Qual a energia potencial gravitacional desse pacote em relação ao piso da cozinha e em relação ao solo?
2. Um sitiante pretende instalar um gerador elétrico para aproveitar a energia de uma queda de água de 12,0 m de

- altura e uma vazão de 60 litros por segundo. Sabendo que cada litro de água tem massa de 1 kg, qual a potência máxima que ele pode obter dessa queda d'água?
- Um lustre, de massa  $m = 2,0$  kg, desprende-se do teto, caindo sobre o chão da sala, de uma altura  $h_A = 3,0$  m.
    - Qual era a energia gravitacional do Lustre, em relação ao chão, quando ele se encontrava no teto?
    - Então, qual o trabalho que o peso do Lustre realizará ao cair do teto até o chão?
    - Ao cair, o lustre passa pelo ponto A, situado a uma altura  $h_A = 2,0$  m do chão. Qual é a Energia gravitacional do lustre ao passar pelo ponto A?
    - Lembrando-se da relação entre trabalho e energia potencial, calcule o trabalho realizado pelo peso do lustre no deslocamento do teto para o ponto A.
  - Uma pessoa estica vagarosamente uma mola de constante elástica  $200$  N/m, cujo comprimento inicial (sem deformação) é de  $50$  cm, até que seu comprimento final seja de  $60$  cm.
    - À medida que a mola vai sendo deformada, a força que ela exerce sobre a pessoa aumenta, diminui ou permanece constante?
    - Expresse, em metros, a deformação final,  $X$ , sofrida pela mola.
    - Qual o valor da força que a mola está exercendo na pessoa quando atinge o comprimento de  $60$  cm?
  - A figura abaixo mostra uma mola comprimida empurrando bloco desde o ponto A, onde sua deformação é  $X_A = 0,40$  m, até o ponto O, no qual a mola não apresenta deformação. O gráfico  $F \times X$  mostra como varia a força  $F$  exercida pela mola sobre o bloco.



- Calcule a inclinação deste gráfico. Então, qual é o valor da constante elástica da mola?
  - Podemos usar a expressão  $T = Fd \cos\theta$  para calcular o trabalho realizado pela mola ao empurrar o bloco? Por quê?
  - Diga como você poderia calcular este trabalho usando o gráfico  $F \times X$ .
  - Qual o valor da energia potencial elástica do bloco quando ele se encontra na posição A?
  - Então, qual o trabalho que a mola realiza ao empurrar o bloco de para O?
  - No instante em que ele está passando ponto B, a deformação da mola é  $X_B = 0,20$  m. Qual é a energia potencial elástica do bloco nesta posição?
  - Lembrando-se da relação entre trabalho e Energia Potencial elástica, calcule o trabalho que a mola realiza ao empurrar o bloco de A para B.
- Um corpo encontra-se na extremidade de uma mola, deformada de um valor  $X$ . Aumentando-se a deformação da mola para um valor  $2X$ : O valor da constante elástica da mola aumenta, diminui ou não varia? Quantas vezes maior torna-se a força exercida pela mola sobre o corpo? Quantas vezes maior torna-se a energia potencial elástica do corpo?

## 6.4. Forças Dissipativas

Vamos considerar que além de forças conservativas, atuam também sobre uma partícula, forças não-conservativas. Seja  $W_T$  o trabalho realizado por todas as forças conservativas que atuam sobre a partícula e  $W_n$  o trabalho realizado pelas forças não-conservativas (por exemplo o atrito). O trabalho total sobre a partícula é a soma desses dois trabalhos.

O teorema do trabalho-energia foi deduzido a partir da segunda lei de Newton que é válida para qualquer fenômeno clássico. Sendo assim, podemos utilizá-lo aqui e obter:

$$\Delta K = W_T + W_n \quad (108)$$

$$\Delta K = W_1 + W_2 + W_3 + \dots + W_n \quad (109)$$

Onde  $W_1, W_2, W_3, \dots$  são os trabalhos correspondentes a várias forças conservativas como, gravidade, elástica, eletrostática etc. Para cada uma dessas forças conservativas podemos associar uma energia potencial  $U$ . Usando a equação (94), podemos associar ao trabalho  $W_1$  uma variação de energia dada por  $W_1 = -\Delta U_1$  e assim por diante. Com isto a equação (109) torna-se:

$$\Delta K = -\sum \Delta U + W_n \quad (110)$$

$$\Delta K + \sum \Delta U = W_n \quad (111)$$

O primeiro termo desta equação é a variação da energia cinética, o segundo termo é a soma das variações da energia potencial e o último termo é o trabalho realizado pela força não-conservativa. A grandeza no primeiro membro é simplesmente  $\Delta E$ , a variação da energia mecânica total, para o caso de várias forças conservativas estarem agindo sobre a partícula. Podemos então ter

$$\Delta E = W_n \quad (112)$$

O trabalho da força dissipativa que atua sobre a partícula é igual a variação de sua energia mecânica total. Como este trabalho é sempre negativo, a energia mecânica final ( $E_f = K_f + \sum U_f$ ) é sempre menor que a energia mecânica inicial ( $E_i = K_i + \sum U_i$ ). Isto significa que o sistema está perdendo energia.

## 6.5. A Conservação da Energia

O que acontece com a energia de um carro em movimento quando ele freia até parar? A energia cinética que ele tinha inicialmente se perde? A resposta é não. Esta energia é apenas transformada em outras formas de energia. Neste caso, por exemplo, a energia cinética se transforma em calor que se desenvolve quando duas superfícies escorregam entre si ou se transforma em energia de vibração das partes que compõe o carro. Estas energias geradas são exatamente iguais à energia mecânica dissipada pelo carro.

Dessa forma, podemos construir uma noção de conservação de energia bem mais ampla que aquela anunciada pelas equações (92, 100, e 101). Vamos associar ao trabalho realizado pelas forças não-conservativas  $W_n$  na equação (112) uma energia chamada de energia interna do sistema que representaremos como sendo  $\Delta U_{\text{int}} = -W_n$ . Assim, quando a energia mecânica do sistema diminuir, surgirá nele energia interna. A equação (112) se tornará:

$$\Delta K + \sum \Delta U = -\Delta U_{\text{int}} \quad (113)$$

$$\Delta K + \sum \Delta U + \Delta U_{\text{int}} = 0 \quad (114)$$

Esta equação é o enunciado mais geral da Lei de Conservação de Energia. Ela é válida para todos os sistemas físicos uma vez que engloba todos os tipos de energia existentes na natureza. Nesta equação, o calor é incluído como uma forma de energia em transição.

**A energia pode ser transformada de uma forma em outra em um sistema isolado, mas não pode ser criada ou destruída; a energia total do sistema permanece sempre constante.**

Este enunciado nunca foi, até o presente, contrariado por qualquer experimento feito em laboratório.



### SAIBA MAIS

(<http://rived.mec.gov.br/atividades/fisica/energia/atividade3/index.html>) Neste site vocês irão encontrar um joguinho divertido para aplicar os conceitos de energia potencial elástica, potencial gravitacional e energia cinética.

### EXERCÍCIO RESOLVIDO

Uma mola em um revólver de brinquedo sofre uma compressão por uma distância  $d = 5,3 \text{ cm}$  a partir de sua posição relaxada. Uma bolinha de massa  $m = 15 \text{ g}$  é introduzida pelo cano horizontal da arma. A constante da mola é igual a  $7,5 \text{ N/cm}$ . Desprezando o atrito, com qual velocidade a bolinha sairá pelo cano do revólver?

#### SOLUÇÃO:

O cano da arma de brinquedo está na posição horizontal e a única força considerada que atua sobre a bolinha nesta direção é a força elástica da mola. A energia potencial armazenada na mola quando ela é comprimida é

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2$$

$$U(x) = \frac{1}{2} kd^2$$

Neste problema, não há forças dissipativas, então a energia mecânica total se conserva. Assim, toda energia potencial da mola é convertida em energia cinética do movimento da bolinha. Quando a mola está comprimida, a energia cinética da bolinha é nula. Depois que a mola empurra a bolinha e esta se desprende, sua energia cinética é  $\frac{1}{2}mv^2$  e a energia potencial é nula. Daí

$$E_i = E_f$$

$$(K_i + U_i) = (K_f + U_f)$$

$$(0 + \frac{1}{2} kd^2) = (\frac{1}{2} mv^2 + 0)$$

$$v = d \sqrt{\frac{k}{m}}$$

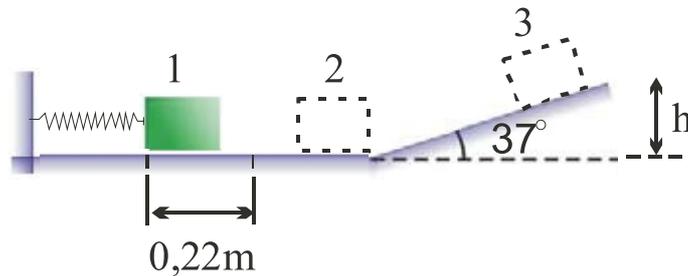
$$v = 0,053 \sqrt{\frac{750}{15 \times 10^{-3}}} = 11,85 \text{ m/s}$$

Nesta solução é necessário usar as conversões  $k = 7,5 \text{ N/cm} = 750 \text{ N/m}$ ,  $d = 5,3 \text{ cm} = 0,053 \text{ m}$  e também  $m = 15 \text{ g} = 15 \times 10^{-3} \text{ kg}$ , todas, unidades do SI.

### EXERCÍCIO RESOLVIDO

Um bloco de  $2,00 \text{ kg}$  é empurrado contra uma mola de massa desprezível e constante  $k = 400 \text{ N/m}$ , comprimindo a mola até uma distância igual a  $0,220 \text{ m}$ . Quando o bloco é libertado, ele se move ao longo de uma superfície horizontal sem atrito e sobe um plano inclinado de  $37,0^\circ$ .

- a) Qual a velocidade do bloco enquanto ele desliza ao longo da superfície horizontal depois de abandonar a mola?
- b) Qual a altura máxima que ele atinge ao subir o plano inclinado até parar?



### SOLUÇÃO:

Neste problema também não há forças dissipativas, logo, a energia mecânica total se conserva ao longo de todo o percurso do bloco. Vamos estudar a energia mecânica do bloco em três instantes diferentes (figura).

- a) No ponto 1, o sistema possui apenas a energia potencial elástica da mola. No ponto 2, o bloco está em movimento e está despreendido da mola. Entre esses dois pontos não houve variação na altura, logo não houve variação da energia potencial gravitacional. Assim,

$$E_1 = E_2$$

$$(K_1 + U_1) = (K_2 + U_2)$$

$$\left(0 + \frac{1}{2} kd^2\right) = \left(\frac{1}{2} mv_2^2 + 0\right)$$

$$v = d\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$v = 0,22\sqrt{\frac{400}{2,0}} = 3,11 \text{ m/s}$$

Esta é a velocidade enquanto o bloco se move na horizontal.

- b) No ponto 3, o bloco está em sua altura máxima, ou seja, parado. Neste ponto, ele somente possui energia potencial gravitacional  $U = mgy$ . Podemos, por exemplo, igualar a energia mecânica total nos pontos 2 e 3:

$$E_2 = E_3$$

$$(K_2 + U_2) = (K_3 + U_3)$$

$$\left(\frac{1}{2} mv_2^2 + 0\right) = (0 + mgh)$$

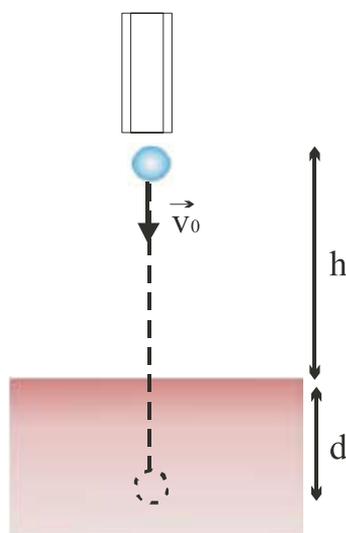
$$h = \frac{v_2^2}{2g} = \frac{3,11^2}{2 \times 9,8} = 0,49 \text{ m}$$

Este mesmo resultado seria encontrado se tivéssemos usado o ponto 1 ao invés do 2.

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

(Halliday & Resnick) Uma esfera de massa  $m = 5,2 \text{ g}$  é lançada verticalmente de uma altura  $h = 18 \text{ m}$  com uma velocidade inicial de  $14 \text{ m/s}$ . Ela enterra-se na areia ficando a uma profundidade de  $21 \text{ cm}$ . Qual é o valor médio da força de atrito, dirigida para cima, que a areia exerce sobre a bola?

QUÍMICA



### SOLUÇÃO:

Neste problema existe força dissipativa, o atrito. Logo, a energia mecânica total não se conserva. A variação dessa energia  $\Delta E$  é igual ao trabalho realizado pela força de atrito. Considerando o instante inicial quando a bola é lançada e o instante final quando a bola para completamente enterrando-se na areia a variação da energia será

$$\Delta E = \Delta K + \Delta U$$

$$\Delta E = (K_f - K_i) + (U_f - U_i)$$

No instante inicial, a bola possui energia cinética e potencial gravitacional. Quanto enterrada na areia, a bola não possui energia cinética (parada) e considerando este ponto como  $y = 0$ , não possui também energia potencial. Assim:

$$\Delta E = \left(0 - \frac{1}{2}mv^2\right) + (0 - mg(h + d))$$

$$\Delta E = \left(-\frac{1}{2}0,0052 \times 14^2\right) - 0,0052 \times 9,8(18 + 0,21) = -1,44 \text{ J}$$

A força de atrito atua na bola enquanto ela está se enterrando na areia. Esta força é contrária ao deslocamento da bola. Logo o trabalho que ela realiza sobre a bola é

$$W_f = fd(\cos 180^\circ) = -fd = -0,21f$$

Logo obtemos

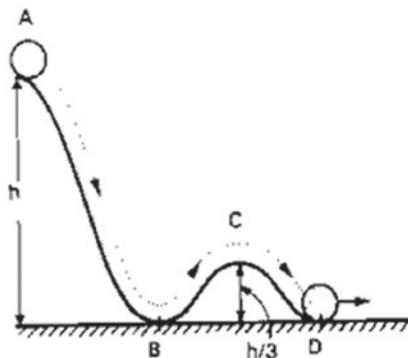
$$\Delta E = W_f$$

$$-1,44 = -0,21f$$

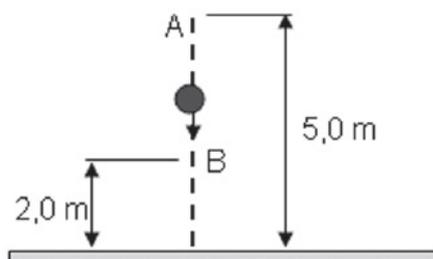
$$f = 6,9 \text{ N}$$

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

7. Uma pequena esfera, de massa  $m = 2,0 \text{ kg}$ , desliza, sem atrito, ao longo do trilho ABCD mostrado na figura deste problema. Em A, a energia cinética da esfera é de  $10,08 \text{ J}$  e sua energia potencial vale  $52,92 \text{ J}$ . Calcule:
- A energia cinética da esfera, ao passar por B,
  - A energia potencial da esfera, em C,
  - A energia cinética da esfera, em C,
  - A energia mecânica total da esfera, em D,
  - A velocidade da esfera, em D, é de  $8,0 \text{ m/s}$ .

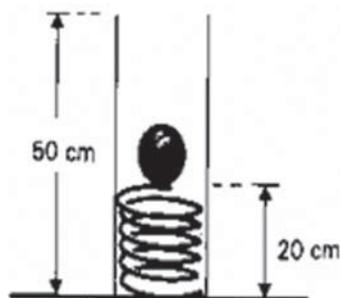


8. Uma pedra, de massa igual a  $2,0 \text{ kg}$ , é abandonada ( $v_0 = 0$ ) do ponto A, caindo verticalmente, como mostra a figura deste problema. Supondo que a resistência do ar não seja desprezível e que a aceleração da gravidade vale  $9,8 \text{ m/s}^2$  assinale, entre as afirmativas seguintes, aquelas que são corretas. Justifique.
- A energia mecânica total da pedra, em A, é igual a  $98,0 \text{ J}$ .
  - A energia mecânica total da pedra, em B, é igual a  $98,0 \text{ J}$ .
  - A energia potencial da pedra, em B, é igual a  $39,2 \text{ J}$ .
  - A energia cinética da pedra, em B, é igual a  $58,8 \text{ J}$ .
  - A energia potencial perdida pela pedra, durante a queda, transforma-se integralmente em energia cinética.

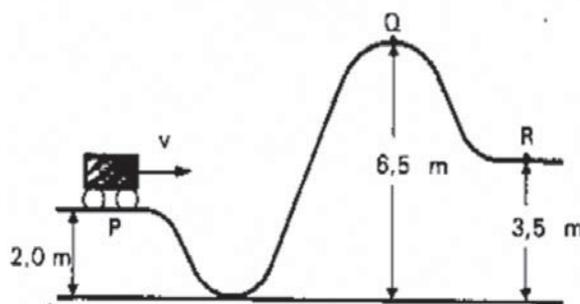


9. Considerando ainda que exista atrito entre a bola e o ar e lembrando-se dos dados do exercício anterior, responda supondo que, ao chegar em B, a energia cinética da bola seja igual a  $10,0 \text{ J}$ .
- Qual foi a perda de energia potencial da bola ao se deslocar de A para B?
  - Qual foi o acréscimo de energia cinética da bola entre A e B? Por que este acréscimo não foi igual à perda de energia potencial?
  - Qual é a energia mecânica total da bola em B?
  - De quanto diminuiu a energia mecânica da bola no movimento de A para B?
  - Qual a quantidade de calor que foi gerado pela força de atrito?

10. Uma bola é lançada verticalmente para cima com uma energia cinética de 15 J, a partir de um ponto A, subindo até um ponto B e retornando ao ponto de lançamento. Em B, a energia potencial da bola (em relação a A) vale 10 J. Entre as afirmativas seguintes, indique aquela está errada. Justifique.
- A energia mecânica total da bola, em A, é de 15 J e, em B, é de 10 J.
  - Durante a subida da bola, a força de resistência do ar realizou um trabalho de -5 J.
  - No trajeto de ida e volta da bola, o trabalho da força de resistência do ar é nulo.
  - A energia cinética da bola, ao retornar ao ponto de lançamento é de 5 J.
  - A quantidade de calor produzido pelo atrito, no trajeto de ida e volta da bola, foi de 10 J.
11. Uma pessoa atira uma pedra verticalmente para baixo, com uma velocidade inicial  $v_0 = 4,0$  m/s, de uma janela situada a uma altura  $h = 6,0$  m acima do solo. Desprezando a resistência do ar, considerando a massa da pedra  $m = 1,0$  kg e  $g = 9,8$  m/s<sup>2</sup>, determinem o valor de sua energia cinética ao atingir o solo.
12. Uma mola de 30 cm de comprimento (não deformada) está presa no fundo de um tubo vertical, liso, de 50 cm de altura. Comprime-se a mola até que seu comprimento se reduza a 20 cm e coloca-se sobre ela uma pequena esfera de massa  $m = 10$  gramas (veja a figura deste problema). Abandonando-se a mola, ela se distende empurrando a esfera, que sobe atingindo uma altura de 1,0 m acima da extremidade superior do tubo. Considerando  $g = 9,8$  m/s<sup>2</sup> e desprezando as forças de atrito, responda:
- Qual é o valor da constante elástica da mola?
  - Qual é a velocidade com que a esfera abandona o tubo?

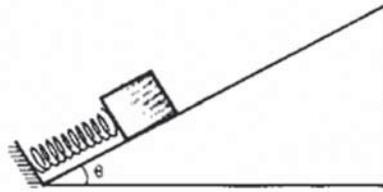


13. Um carrinho de massa  $m = 2,0$  kg move-se, sem atrito, ao longo da superfície mostrada na figura deste problema, passando pelo ponto P com uma velocidade  $v = 10$  m/s.
- Mostre que o carrinho alcançará o ponto R.
  - Determine a velocidade do carrinho ao passar por R.

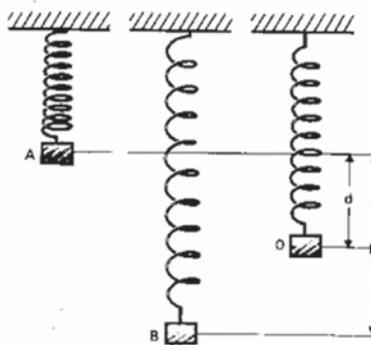


14. A figura deste problema mostra uma mola, de constante elástica 100 N/m, e cujo comprimento, quando ela não está deformada, é de 60 cm. A mola está presa à base de um plano inclinado liso, que forma um ângulo de 30° com a horizontal. Uma pessoa comprime a mola de 40 cm e encosta a ela um corpo de peso igual a 10 N, mantendo-a com esta compressão. Se o conjunto é abandonado pela pessoa,

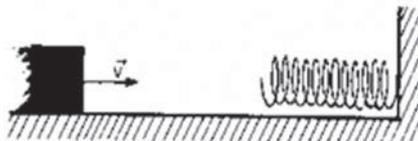
- a) Qual será a energia cinética do bloco no instante em que ele perde contato com a mola?  
 b) Qual altura na rampa o corpo alcançara desprezando o atrito.



15. Se prendermos um corpo a extremidade de uma Mola vertical não distendida (posição A da figura deste problema) e o deixarmos baixar lentamente, verificamos que o corpo fica em repouso quando a mola estiver distendida de  $d = 15$  cm (ponto O da figura). Em uma segunda experiência, deixamos o corpo cair, a partir do repouso, do ponto A, e verificamos que, neste caso, o corpo distende a mola até o ponto B, provocando nela uma deformação máxima D. Calcule o valor de D.



16. Um bloco de massa igual a  $1,0$  kg colide com uma mola horizontal, cuja constante elástica vale  $20$  N/m (veja a Figura deste problema), comprimindo-a de  $40$  cm. Supondo que o coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície horizontal valha  $0,30$ , determine a velocidade do bloco no instante em que ele colidiu com a mola.



17. Marque a alternativa correta. Quando um corpo é levado a certa altura do solo, a energia despendida para se conseguir tal intuito:
- Acumula-se, no corpo, sob a forma de energia interna.
  - É igual à variação da energia cinética do corpo.
  - É nula, pois a resultante média das forças na elevação é nula.
  - Fica armazenada, no corpo, sob a forma de energia potencial gravitacional.
  - Transforma-se em calor durante a subida.
18. Num trecho de uma montanha russa um carrinho de  $100$  kg passa pelo ponto A, que está a  $8,7$  m de altura com velocidade escalar de  $10$  m/s. Supondo que o atrito seja desprezível, determine a energia cinética do carrinho no ponto B que está a  $5,2$  m de altura.

19. Um elevador com uma massa de 1000 kg está descendo com uma velocidade de 4,0 m/s, quando o sistema de guincho que o sustenta começa a patinar, permitindo que caísse com aceleração constante  $a = g/5$ .
- Se o elevador cai por uma distância  $d = 10$  m, qual o trabalho total realizado sobre o elevador durante a queda de 10 m?
  - Qual a energia cinética do elevador no final da queda de 10m?
  - Qual é a velocidade final do elevador no final da queda?
20. Indique as sentenças falsas e justifique-as.
- Qualquer corpo que se move tem energia cinética.
  - A energia cinética de um corpo depende de um referencial
  - Dois corpos que tem a mesma massa podem ter a mesma energia cinética.
  - Corpos de mesma velocidade terão obrigatoriamente a mesma energia cinética.
  - A energia cinética de um corpo mede o trabalho necessário para fazê-lo parar.

## RESPOSTAS

1. 88,2 J e 1558,2 J; 2. 7056 W; 3. (a) 58,8 J, (b) 58,8 J, (c) 39,2 J, (d) 19,6 J; 4. (a) aumenta, (b) 0,6 m, (c) 20 N; 5. (a) 150 N/m, (b) Não, (c) Área, (d) 12 J, (e) 12 J, (f) 3 J, (g) 9 J; 6. Não varia, 2 vezes maior, 4 vezes maior; 7. (a) 635,00, (b) 17,64 J, (c) 45,36 J, (d) 63,00 J, (e) 7,94 m/s; 8. Corretas (a) e (c); 9. (a) 58,8 J, (b) 10,0 J, (c) 49,2 J, (d) 48,8 J, (e) 48,8 J; 10. (c); 11. 66,8 J; 12. (a) 2,8 N/m, (b) 4,4 m/s; 13. (a)  $E_{TP} > E_{TQ}$ , (b) 8,4 m/s; 14. (a) 6 J. (b) 1 m; 15.  $D = 30$  cm; 16. 2,4 m/s; 17. (d); 18. 8430 J; 19. (a) 19600 J, (b) 11600 J, (c) 4,8 m/s; 20. (d) e (e).

## 7. LEI DE CONSERVAÇÃO DO MOMENTO LINEAR

### 7.1. Introdução

Até agora estudamos o movimento dos corpos considerando-os como uma partícula. Supomos que todas as partes do corpo se moviam da mesma forma, tinham a mesma velocidade, aceleração e sofriam o mesmo deslocamento. Porém, quando assistimos a uma corrida de fórmula um, observamos que os pontos que compõem a roda do carro se movimentam de forma diferente do movimento das partículas que compõem o pára-choque. Quando um malabarista arremessa uma garrafa para o alto vemos que ela descreve uma trajetória parabólica, porém ao mesmo tempo, a garrafa segue girando no ar. Ou seja, as partículas que lhe compõem têm movimentos diferentes. Desta forma, como podemos descrever de forma correta o movimento destes corpos?

Em nosso estudo, agora iremos introduzir dois novos conceitos, o **momento linear** e **centro de massa**, e uma nova lei de conservação, a **conservação do momento linear**. Esta nova lei é mais geral que as leis de Newton que estudamos anteriormente. Enquanto as leis de Newton são válidas apenas na mecânica clássica (corpos macroscópicos que se movem com velocidade muito abaixo da velocidade da luz), a lei de conservação do momento linear é válida para toda a mecânica: clássica, quântica ou relativística.

Os físicos procuram transformar algo complicado em algo simples e familiar. Se vocês prestarem bem a atenção em todos esses exemplos, irão observar que existe um ponto do objeto que se move de forma simples. No exemplo da garrafa do malabarista, vocês irão observar que existe um ponto da garrafa que descreve uma trajetória parabólica simples e todas as partículas da garrafa giram em torno deste ponto. Todos os corpos possuem este ponto especial chamada de centro de massa.



Figura 41: ([http://fisicamoderna.blog.uol.com.br/arch2007-09-02\\_2007-09-08.html](http://fisicamoderna.blog.uol.com.br/arch2007-09-02_2007-09-08.html)) Quando Diego Hypólito salta seu corpo extenso, gira no ar enquanto o seu centro de massa (ponto vermelho na ilustração), que fica mais ou menos na altura do umbigo, realiza uma trajetória parabólica.

### 7.2. Centro de Massa

Os centros de massa dos corpos podem ou não estar localizados dentro destes corpos. Veremos mais adiante que em um sistema de partículas podemos ter o centro de massa em um espaço vazio. Quando localizamos o centro de massa de qualquer sistema, encontramos também o seu centro de equilíbrio deste sistema (figura 42). Vamos inicialmente, nesta seção, aprender como calcular a posição do centro de massa. Nas seções seguintes, discutiremos propriedades que o tornam útil na descrição dos movimentos de objetos ou sistemas de partículas.



Figura 42: (<http://fisicomaluco.com/experimentos/2008/11/20/atividade-experimental-sobre-equilibrio-e-centro-de-massa/>)

Considerem inicialmente o caso simples de duas partículas  $m_1$  e  $m_2$  localizadas nas posições  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente (Figura 43a). Definimos a posição do centro de massa por:

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \quad (115)$$

Podemos estender esta definição para o caso de  $n$  partículas dispostas ao longo do eixo  $Ox$ . Fazendo  $M = m_1 + m_2 + \dots + m_n$  obtemos:

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n} \quad (116)$$

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i \quad (117)$$

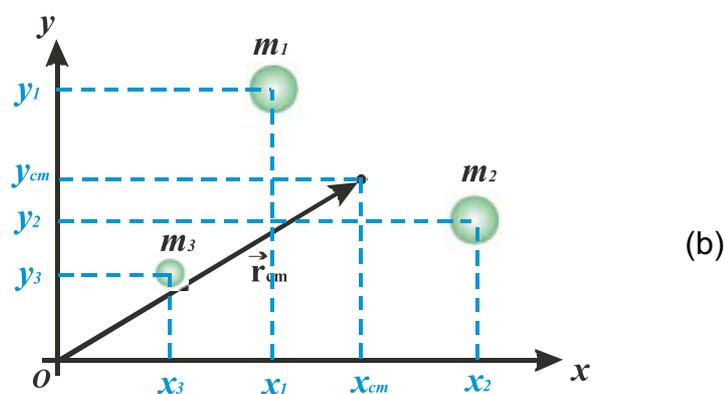
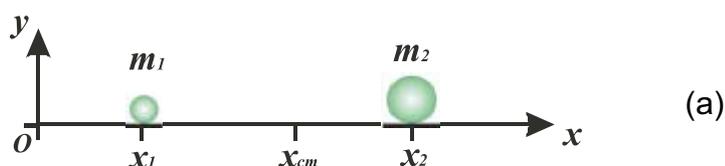


Figura 43: Distribuição de partículas (a) em uma dimensão com centro de massa em  $x_{cm}$  e (b) em um plano com centro de massa em  $\vec{r}_{cm} = \vec{x}_{cm} + \vec{y}_{cm}$ . Aqui, as partículas foram representadas no plano para simplificar a figura.

Aqui o índice  $i$  assume valores inteiros de 1 até  $n$ . Se as partículas estiverem distribuídas em três dimensões (Figura 43b), o centro de massa é calculado por três coordenadas:

$$\begin{aligned}x_{cm} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i \\y_{cm} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i \\z_{cm} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i z_i\end{aligned}\quad (118)$$

Escrevendo na forma vetorial onde  $\vec{r}_{cm} = \vec{x}_{cm} + \vec{y}_{cm} + \vec{z}_{cm}$  é o vetor posição do centro de massa teremos:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \quad (119)$$

Um objeto tal como uma garrafa, uma raquete ou um carro, contém um número grande de partículas (átomos) muito próximas de modo que devemos tratá-los como uma distribuição contínua de massa. Neste caso, as partículas na equação (119) tornam-se elementos diferenciais de massa  $mv$  e a soma, naquela equação, torna-se uma integral:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \int \vec{r} \, mv \quad (120)$$

Em geral, esta integral é difícil de ser calculada, porém nos restringiremos aqui a casos simples de objetos que apresentam certa simetria. Estes objetos possuem um ponto, uma linha ou um plano de simetria. O centro de massa localiza-se então naquele ponto, naquela linha ou naquele plano. Por exemplo, o centro de massa de uma esfera homogênea está no seu centro. Um cone possui um eixo de simetria, logo seu centro de massa está ao longo desse eixo. Em um pneu de borracha, o centro de massa está localizado em seu centro, apesar deste não ser um lugar maciço, não haver borracha nesse local.

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

A figura 43b mostra três partículas de massa  $m_1 = 3,4$  kg,  $m_2 = 2,5$  kg e  $m_3 = 1,2$  kg, localizadas nas posições (5 cm; 15 cm), (10 cm; 8 cm) e (2 cm; 6 cm), respectivamente. Onde está o centro de massa dessa distribuição de partículas?

### SOLUÇÃO:

Como as partículas estão no plano, usamos as componentes  $x$  e  $y$  da equação (118):

$$\begin{aligned}x_{cm} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} \\x_{cm} &= \frac{3,4 \times 5 + 2,5 \times 10 + 1,2 \times 2}{3,4 + 2,5 + 1,2} = 6,25 \text{ cm}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}y_{cm} &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3} \\y_{cm} &= \frac{3,4 \times 15 + 2,5 \times 8 + 1,2 \times 6}{3,4 + 2,5 + 1,2} = 11,01 \text{ cm}\end{aligned}$$

A posição do centro de massa é identificada pelo vetor  $\vec{r}_{cm} = \vec{x}_{cm} + \vec{y}_{cm} + \vec{z}_{cm}$ . O módulo deste vetor é

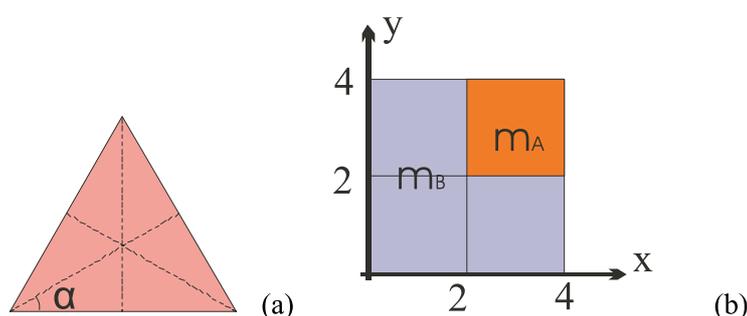
$$r_{cm} = \sqrt{6,25^2 + 11,01^2} = 12,66 \text{ cm}$$

e ele forma um ângulo  $\theta$  com o eixo horizontal:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y_{cm}}{x_{cm}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{11,01}{6,25}\right) = 60,42^\circ.$$

### EXERCÍCIO RESOLVIDO

Calculuem o centro de massa das duas placas homogêneas mostradas na figura. A primeira é um triângulo equilátero de massa com lado igual a 5 cm e a segunda é um quadrado de massa  $m_A = 10$  g colado a uma figura em forma de L com massa  $m_B = 3$  g.



### SOLUÇÃO:

(a) Sendo a figura um triângulo equilátero, apresenta simetria ao longo do eixo vertical que passa pelo seu centro. O centro de massa está localizado nesse eixo. Para encontrá-lo, traçamos linhas dos vértices até o meio de cada face oposta do triângulo (como mostrado na figura). O ponto onde estas linhas se cruzam é a posição do centro de massa.

Para calcular a posição do centro de massa vamos observar a figura e utilizar nossos conhecimentos de geometria. Sendo os ângulos internos de um triângulo equilátero igual a  $60^\circ$ , o ângulo  $\alpha$  indicado na figura será de  $30^\circ$ . Fazendo  $l$  o lado do triângulo e  $h$  a altura do centro de massa no eixo vertical temos:

$$\tan \alpha = \frac{h}{l/2} = \frac{2h}{l}$$

$$h = \frac{l \cdot \tan \alpha}{2}$$

$$h = \frac{5 \cdot \tan 30}{2} = 1,44 \text{ cm}$$

O centro de massa está no eixo vertical, dentro do triângulo e a 1,44 cm acima da face horizontal.

(b) Como a figura apresenta simetria e é homogênea, vamos calcular seu centro de massa dividindo a figura em quatro quadrados. Um com massa  $m_A$  e três com massa  $m_B/3 = 1$  g. Cada quadrado desses pode ser representado como uma partícula localizada em seu centro de massa. Dessa forma, teremos partículas de massa  $m_B/3$

localizadas nas posições (1;3), (1;1) e (3;1) e uma partícula com massa  $m_A$  localizada em (3;3). Daí, usando a equação (118) encontramos:

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i x_i = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

$$x_{cm} = \frac{1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 3 + 10 \times 3}{1 + 1 + 1 + 10} = 2,69 \text{ cm}$$

e

$$y_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i y_i = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + m_4 y_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

$$y_{cm} = \frac{1 \times 3 + 1 \times 1 + 1 \times 1 + 10 \times 3}{1 + 1 + 1 + 10} = 2,69 \text{ cm}$$

A posição do centro de massa é (2,69 ; 2,69). Como era de se esperar pela simetria da figura, o centro de massa está localizado ao longo da diagonal da figura formada por  $m_A$  e  $m_B$ .

### 7.3. Movimento do Centro de Massa

Considerem o movimento de um sistema de partículas com massa total  $M$ , por enquanto constante. Ou seja, as partículas cujas massas são  $m_1, m_2, m_3 \dots m_n$  não podem entrar ou sair do sistema. A posição do centro de massa desse sistema dada pela equação (119) nos fornece:

$$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = \frac{1}{M} (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3 + \dots + m_n \vec{r}_n) \quad (121)$$

$$M \vec{r}_{cm} = (m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_3 \vec{r}_3 + \dots + m_n \vec{r}_n) \quad (122)$$

Derivando esta equação em relação ao tempo, obteremos:

$$M \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \left( m_1 \frac{d\vec{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{r}_2}{dt} + m_3 \frac{d\vec{r}_3}{dt} + \dots + m_n \frac{d\vec{r}_n}{dt} \right) \quad (123)$$

$$M \vec{v}_{cm} = (m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3 + \dots + m_n \vec{v}_n). \quad (124)$$

Onde  $\vec{v}_1$  é a velocidade da primeira partícula etc, e  $\frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \vec{v}_{cm}$  é a velocidade do centro de massa. Derivando a equação (83), obtemos:

$$M \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \left( m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} + m_3 \frac{d\vec{v}_3}{dt} + \dots + m_n \frac{d\vec{v}_n}{dt} \right) \quad (125)$$

$$M \vec{a}_{cm} = (m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + m_3 \vec{a}_3 + \dots + m_n \vec{a}_n) \quad (126)$$

Aqui,  $\vec{a}_1$  é a aceleração da primeira partícula etc, e  $\frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \vec{a}_{cm}$  é a aceleração do centro de massa do sistema. De acordo com a segunda lei de Newton,  $m_1 \vec{a}_1$  é a resultante das forças  $\vec{F}_1$  que atuam na primeira partícula ( $\vec{F}_1 = m_1 \vec{a}_1$ ). Da mesma forma, para a segunda partícula etc. Podemos escrever que:

$$M \vec{a}_{cm} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n \quad (127)$$

Logo, o produto da massa total do sistema pela aceleração do seu centro de massa é igual a resultante de todas as forças que atuam nas partículas. Entre essas forças estão contabilizadas também as forças internas exercidas por uma partícula sobre outra. Porém, de acordo com a terceira lei de Newton, estas forças internas ocorrem aos pares, cada par com duas forças de mesmo módulo e sentido contrário. Assim, quando somarmos vetorialmente todas as forças internas, elas se anularão. Portanto, a soma no lado direito da equação (127) representa apenas a resultante de todas as forças **externas** que atuam no sistema de partículas. Podemos escrever então:

$$M\vec{a}_{cm} = \vec{F}_{ext}. \quad (128)$$

Esta equação nos mostra que podemos representar todo o sistema como sendo uma partícula de massa  $M$  localizada no centro de massa do sistema. Como se todas as forças externas aplicadas ao sistema estivessem atuando sobre esta partícula de massa  $M$ .

Qualquer que seja o sistema, não importa como suas partes individuais estejam se movendo, o seu centro de massa se move de acordo com a equação (127). Então, ao invés de tratarmos de todas as partes do corpo, podemos tratá-las como uma partícula no centro de massa. É este procedimento que temos usado implicitamente no diagrama de forças de problemas anteriores.

Agora podemos entender o movimento da garrafa que o malabarista atira para o ar. Apesar do seu movimento complexo, o seu centro de massa descreve uma trajetória parabólica simples como a que estudamos no capítulo 6 em lançamento de projéteis. A garrafa pode ser representada por uma partícula e a única força externa que atua sobre ela é a força gravitacional.

O mesmo acontece quando vocês disparam um rojão para o alto. O rojão irá descrever uma trajetória parabólica devido à força gravitacional atuando no seu centro de massa (única força externa). Quando o rojão explode no ar suas partes se espalham, porém o centro de massa continua com a mesma trajetória parabólica. Isto acontece porque as forças envolvidas na explosão são forças internas ao sistema. As partes espalhadas do rojão irão se mover de forma a manter o centro de massa na trajetória parabólica. Observem na figura (44) que após a explosão o centro de massa não necessariamente apresenta massa.



Figura 44: (<http://ideiasemdesalinho.blogs.sapo.pt/arquivo/Fogo%20de%20artificio.jpg>)

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

Considerem as três partículas mostradas na figura (43b), onde  $m_1 = 3,4$  kg,  $m_2 = 2,5$  kg e  $m_3 = 1,2$  kg. Suponham que sobre a partícula 1 atua uma força de módulo  $F_1 = 16$  N que forma um ângulo de  $45^\circ$  com a horizontal

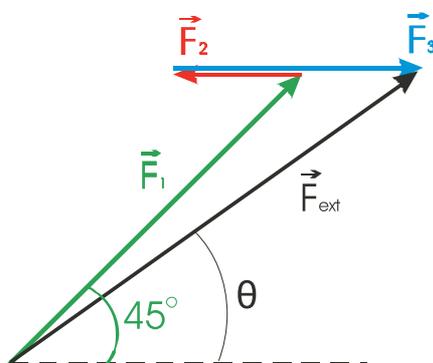
(nordeste), sobre a partícula 2 uma força  $F_2 = 6 \text{ N}$  na horizontal que aponta para a esquerda e sobre a partícula 3 uma força  $F_3 = 12 \text{ N}$  na horizontal para a direita. Todas elas são forças externas ao sistema. Qual a aceleração do centro de massa deste sistema?

### SOLUÇÃO:

As forças externas a esse sistema de três partículas são  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$ . A resultante dessas forças,  $\vec{F}_{ext}$ , está representada na figura abaixo. As componentes x e y da força resultante são:

$$F_{ext}^x = F_1^x + F_2^x + F_3^x = F_1 \cos 45^\circ + F_2^x + F_3^x = 16 \cos 45^\circ - 6 + 12 = 17,31 \text{ N}$$

$$F_{ext}^y = F_1^y + F_2^y + F_3^y = F_1 \text{ sen} 45^\circ + F_2^y + F_3^y = 16 \text{ sen} 45^\circ + 0 + 0 = 11,31 \text{ N}.$$



O módulo da força resultante é

$$F_{ext} = \sqrt{(F_{ext}^x)^2 + (F_{ext}^y)^2} = \sqrt{(17,31)^2 + (11,31)^2} = 20,68 \text{ N}$$

O sentido da força resultante é

$$\theta = \arctan\left(\frac{F_{ext}^y}{F_{ext}^x}\right) = \arctan\left(\frac{11,31}{17,31}\right) = 33,16^\circ$$

Usando a equação (128) encontramos a aceleração do centro de massa do sistema de partículas. A aceleração tem o mesmo sentido da força  $\vec{F}_{ext}$  e seu módulo é:

$$M\vec{a}_{cm} = \vec{F}_{ext}$$

$$Ma_{cm} = F_{ext}$$

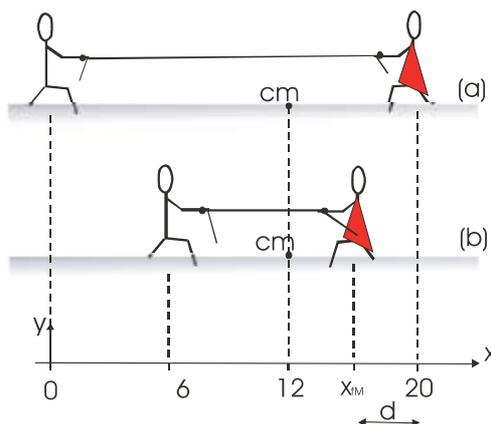
$$a_{cm} = \frac{F_{ext}}{M} = \frac{20,68}{3,4 + 2,5 + 1,2} = 2,91 \text{ m/s}^2.$$

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

Duas crianças, João e Maria, estão brincando de cabo de guerra, ambos sobre patins. A distância entre eles é de 20,0 m. João possui 60,0 kg e Maria possui 90,0 kg. Eles puxam as extremidades da corda leve esticada entre eles. Quando João se desloca 6,0 m em direção a Maria, qual a distância que Maria irá se deslocar em direção a João?

### SOLUÇÃO:

Como João e Maria estão sobre patins, desprezamos a força de atrito neste problema, logo não existem forças externas atuando sobre eles na direção horizontal. Na direção vertical, temos a força peso, porém esta direção não será necessária para a resolução do problema.



Antes de puxarem a corda, o centro de massa do sistema de partículas formado por João e Maria está entre eles na posição representada no item (a) da figura. Esta posição é dada pela equação (116 ou 118):

$$x_{cm} = \frac{m_J x_J + m_M x_M}{m_J + m_M} = \frac{60,0 \times 0,0 + 90,0 \times 20,0}{60,0 + 90,0} = 12 \text{ m}$$

Aqui, a posição  $x_J$  de João foi considerada como sendo na origem dos eixos coordenados e a posição de Maria foi  $x_M = 20\text{m}$ .

Depois de puxarem a corda, ambos mudam de posição. Porém, não existiram forças externas atuando no sistema considerado. Assim, de acordo com a equação (128) o centro de massa não foi acelerado. Ou seja, não saiu de sua posição inicial. Usamos essa informação, juntamente com a equação (116) para calcular o deslocamento sofrido por Maria (Item b da figura):

$$x_{cm} = \frac{m_J x_J + m_M x_M}{m_J + m_M}$$

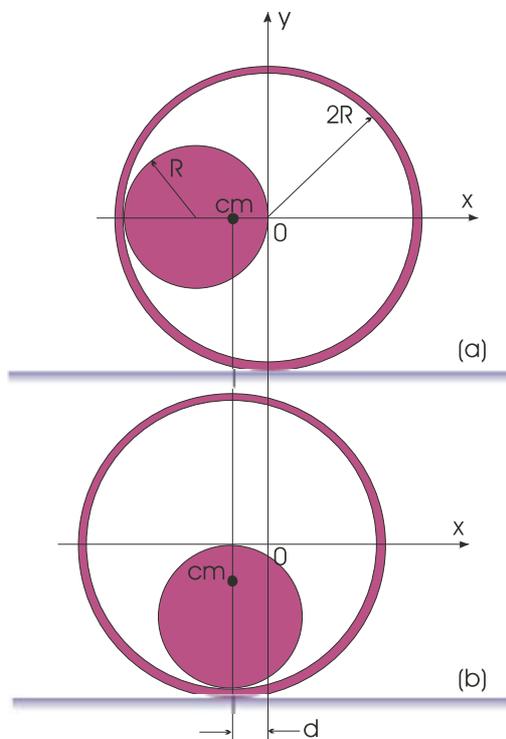
$$12 = \frac{60,0 \times 6,0 + 90,0 \times x_{JM}}{60,0 + 90,0}$$

$$x_{JM} = 16,0 \text{ m}$$

Ou seja, o deslocamento de Maria foi de  $d = 20,0 - 16,0 = 4,0\text{m}$  em direção a João.

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

(Halliday & Resnick) Uma bola de massa  $m$  e raio  $R$  é colocada no interior de uma casca esférica de mesma massa e raio interno  $2R$ . O sistema está em repouso sobre uma mesa sem atrito, na posição mostrada na figura (a). A bola é solta, e gira no interior da casca parando no fundo desta como mostra a figura (b). Qual o deslocamento  $d$  da casca durante este processo?



### SOLUÇÃO:

As únicas forças externas que atuam sobre o sistema bola-casca são a força da gravidade para baixo e a força normal, exercida verticalmente para cima pela mesa. Nenhuma destas forças tem componente horizontal, de modo que  $\sum F_{ext}^x = 0$ . Da equação (128), o componente  $a_{cm}^x$  da aceleração do centro de massa também é nulo. Assim, a posição horizontal do centro de massa do sistema permanece fixa e a casca deve mover-se de modo que isto aconteça.

Podemos representar a bola e a casca por simples partículas de massa  $m$ , localizadas em seus respectivos centros. A figura (a) mostra o sistema antes de a bola ser solta e a figura (b), a bola já em repouso no fundo da casca. Escolhemos a origem coincidente com a posição inicial do centro da casca. A figura (a) mostra que em relação a esta origem, o centro de massa do sistema bola-casca está localizado a uma distância  $R/2$  à esquerda, no meio entre as duas partículas. A figura (b) mostra que o deslocamento da casca é dado por

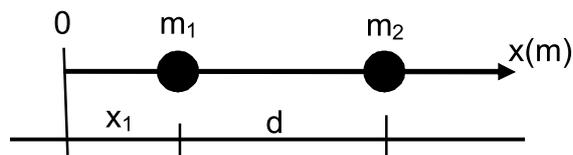
$$d = \frac{R}{2}$$

A casca move-se, desta distância, para a esquerda no mesmo tempo que a bola atinge o repouso.

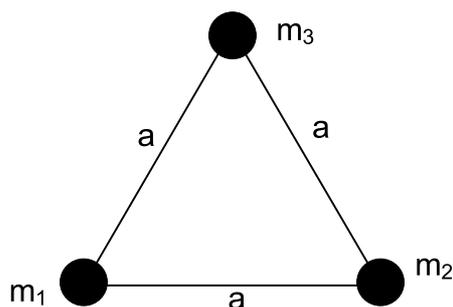
## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

- Dada a figura abaixo,  $m_1 = 20$  kg,  $m_2 = 30$  kg,  $d = 10$  m e  $x_1 = 2$  m. Calcule
  - A posição do centro de massa,
  - A posição do centro de massa quando o sistema de partículas ( $m_1$  e  $m_2$ ) é deslocado tal que  $m_1$  coincida com a origem.

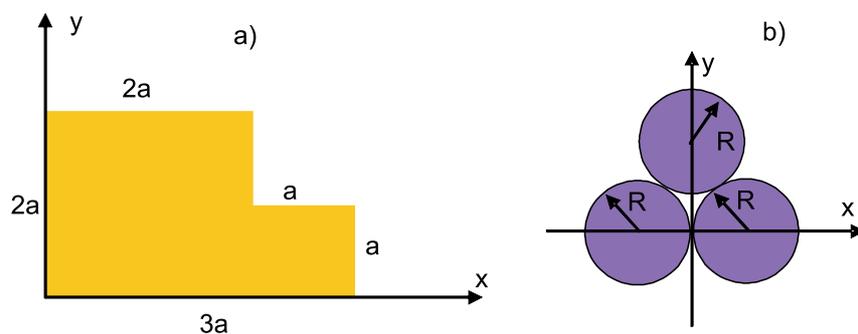
- c) A posição do centro de massa utilizando os dados iniciais, mas com  $m_1 = 100$  kg.  
 d) A posição do centro de massa com os dados iniciais onde  $d = 20$  m.



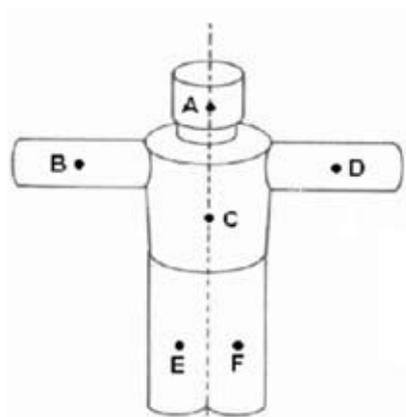
2. A figura abaixo mostra três partículas de massas  $m_1 = 1,2$  kg,  $m_2 = 2,5$  kg e  $m_3 = 3,4$  kg, localizados nos vértices de um triângulo equilátero, com lado  $a = 140$  cm. Onde está o centro de massa?



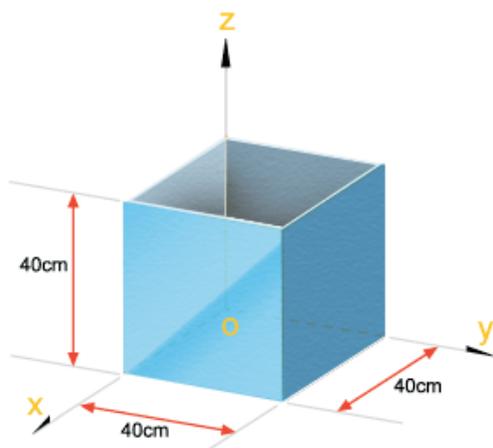
3. Determine as coordenadas do centro de massa dos sistemas abaixo que se constituem de placas homogêneas de espessura constante, cujas dimensões estão indicadas na figura.



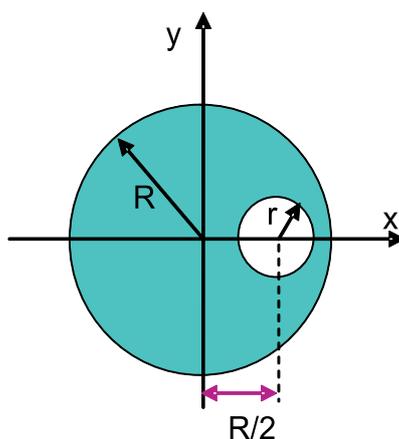
4. Considere a figura abaixo cujos pontos em centímetros são:  $A = (210, 180)$ ,  $B = (150, 160)$ ,  $C = (210, 110)$ ,  $D = (270, 160)$ ,  $E = (200, 50)$ ,  $F = (220, 50)$  e as massas em kg:  $m_A = 5$ ,  $m_B = 5$ ,  $m_C = 35$ ,  $m_D = 5$ ,  $m_E = 10$ ,  $m_F = 10$ . Calcule o centro de massa do corpo.



5. Uma caixa, na forma de um cubo cuja aresta mede 40 cm, tem o topo aberto e foi construída de uma placa metálica fina. Encontre as coordenadas do centro de massa da caixa em relação ao sistema de coordenadas mostrado na Figura.



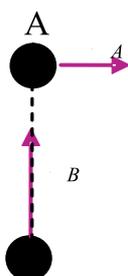
6. A placa circular, homogênea e de espessura constante, tem raio  $R$  e possui um furo circular de raio  $r$ . Determine em função de  $R$  e  $r$  as coordenadas do centro de massa da placa.



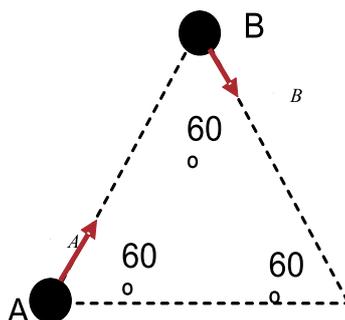
7. As partículas A e B, de massa  $m$  e  $2m$ , deslocam-se ao longo do eixo  $Ox$ , com velocidades escalares  $v_A = 5,0 \text{ m/s}$  e  $v_B = 8 \text{ m/s}$ . Qual a velocidade escalar do centro de massa?



8. As partículas A e B, de massas 1,5 kg e 1,0 kg, deslocam-se com velocidades  $\vec{v}_A$  e  $\vec{v}_B$  perpendiculares entre si e de módulos  $v_A = 2,0$  m/s e  $v_B = 4,0$  m/s. Calcule o módulo da velocidade do centro de massa do sistema constituído pelas duas partículas.



9. Num certo instante, duas partículas A e B possuem velocidades indicadas na figura. As partículas possuem a mesma massa e suas velocidades são iguais, em módulo, a 10 m/s. Determine, no instante considerado, o módulo da velocidade do centro de massa do sistema constituído por essa duas partículas.



10. Um gorila de massa  $m$  está pendurado em uma escada de corda, suspensa por um balão de massa  $M$ . O balão está estacionário em relação ao solo.  
Se o homem começar a subir pela escada a velocidade  $v$  (com relação à escada), em que direção e com que velocidade (com relação à terra) o balão se moverá?  
Qual o estado do movimento após o homem ter parado de subir?
11. Uma passageira de 50 kg está em pé e parada dentro de um barco que se encontra a 6 m da margem. Ela anda 2,4 m sobre o barco em direção a margem e depois para. O barco tem massa de 20 kg e supõe-se que não haja atrito entre ele e a água. A que distância da margem estará a passageira no final da caminhada? (sugestão: o centro de massa do sistema barco + passageira não se desloca. Por quê?)

## 7.4. Momento Linear

O momento linear ou quantidade de movimento linear de uma partícula de massa  $m$  que se move com uma velocidade  $\vec{v}$  é definido como o produto da massa pela velocidade:

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (129)$$

Assim como a velocidade, o momento linear da partícula também é uma grandeza vetorial e depende do referencial do observador.

A segunda lei de Newton foi inicialmente expressa em termos do momento linear da partícula:

**A taxa de variação do momento linear de um corpo é proporcional à resultante das forças que atuam no corpo e tem a direção desta força.**

$$\vec{F}_R = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (130)$$

Observem na equação abaixo que esta forma de apresentar a segunda lei de Newton é equivalente àquela apresentada em capítulos anteriores:

$$\vec{F}_R = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \quad (131)$$

Porém, a segunda lei de Newton como apresentada na equação (131) é válida apenas na mecânica clássica, enquanto a forma mostrada na equação (130) é válida na mecânica clássica, quântica ou relativística.

Considerem que o sistema possui  $n$  partículas, de modo que  $M = \sum m_i$ , e que forças atuam sobre esse sistema. Cada partícula terá uma velocidade e um momento linear. A partícula de massa  $m_1$  e velocidade  $\vec{v}_1$  terá um momento linear  $\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1$ , por exemplo. O sistema como um todo terá, em um referencial particular, um momento linear  $\vec{P}$  que é definido como a soma vetorial dos momentos lineares de todas as partículas individuais:

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n \quad (132)$$

$$\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots + m_n\vec{v}_n \quad (133)$$

Comparando esta equação com a (124) observamos rapidamente que

$$\vec{P} = M\vec{v}_{cm} \quad (134)$$

Ou seja, o momento linear total de um sistema de partículas é igual ao produto de sua massa total pela velocidade do centro de massa do sistema.

Vimos que para um sistema de partículas a segunda lei de Newton é  $\vec{F}_{ext} = M\vec{a}_{cm}$ , onde  $\vec{F}_{ext}$  é a resultante das forças externas que atuam sobre o sistema. Lembramos que as forças internas se anulam mutuamente. Se diferenciarmos a equação (134) em relação ao tempo temos:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = M\vec{a}_{cm} \quad (135)$$

Assim,

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (136)$$

Esta equação é a generalização da segunda lei de Newton para um sistema de partículas.

## 7.5. Conservação do Momento Linear

Considerem um sistema de partículas, que podem interagir entre si, mas estão isoladas dos arredores. O sistema se move sob a ação das forças de interação mútua entre as partículas (forças internas ao sistema), porém não há forças externas ao sistema,  $\vec{F}_{ext} = 0$ . Assim, de acordo com a equação (136) temos:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \quad \text{ou} \quad \vec{P} = \text{constante.} \quad (137)$$

**Quando a resultante das forças externas que atuam em um sistema é nula, o vetor momento linear do sistema permanece constante.**

Este resultado simples e geral é conhecido como o princípio da conservação do momento linear. Veremos que ele se aplica a inúmeras situações físicas importantes.

Os princípios de conservação são de importância teórica e prática na física porque são simples e universais. Enquanto o sistema se modifica, há um aspecto do sistema que permanece invariável. Para a conservação do momento linear, por exemplo, observadores em diferentes referenciais indicariam diferentes valores  $\vec{P}$  para o momento linear do sistema, mas todos eles concordariam (supondo  $\vec{F}_{ext} = 0$ ) que o seu próprio valor de  $\vec{P}$  permanece invariável, enquanto as partículas que constituem o sistema se movem.

Para um sistema de partículas

$$\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n \quad (138)$$

de tal modo que, quando o momento linear total é constante temos

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n = \text{const.} \quad (139)$$

$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} + \dots + \vec{p}_{ni} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f} + \dots + \vec{p}_{nf} \quad (140)$$

Os momentos lineares das partículas individuais podem sofrer variações, mas sua soma permanece constante se não há forças externas. Na equação (140), consideramos  $\vec{p}_{1i}$  como sendo o momento linear da partícula 1 em um instante inicial e  $\vec{p}_{1f}$  seu momento linear em um instante final depois. O mesmo para as partículas 2, 3, ..., n.

Observem que a equação (140) é vetorial, então se pode decompô-la em três equações independentes ao longo dos eixos cartesianos x, y e z.



### SAIBA MAIS

(<http://rived.mec.gov.br/atividades/fisica/conservacao/atividade4/atividade4.htm>) Neste site vocês irão simular movimentos para reconhecer que a quantidade de movimentos total de um sistema é uma invariante; reconhecer a Conservação da Quantidade de Movimento total do sistema, utilizando essa noção na análise de diversas situações; reconhecer, pela análise das cenas, que a quantidade de movimentos depende das massas e das velocidades dos corpos envolvidos; expressar-se coerentemente, utilizando a Lei de Conservação da Quantidade de Movimento; identificar regularidades nas várias cenas, associando fenômenos que ocorrem em situações semelhantes; compreender que a origem dos movimentos depende de interações entre corpos distintos, como nas várias interações que ocorrem entre os dois patinadores.

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

Um soldado testando um lança-granadas de massa  $m_l = 10,00$  kg, segura-a frouxamente de modo que ele possa recuar livremente ao disparar. Ele atira uma granada de massa  $m_g = 0,20$  kg horizontalmente com velocidade relativa ao solo igual a  $v_g = 300$  m/s. Qual a velocidade de recuo  $v_l$  do lança-granadas? Quais são os valores da energia cinética final e do momento linear do lança-granadas?



### SOLUÇÃO:

Consideramos a situação ideal onde desprezamos a força do soldado sobre o lança-granadas. Assim, não há nenhuma força resultante externa atuando sobre o sistema (arma e granada) no momento do disparo, assim, o momento linear horizontal total do sistema é o mesmo antes e depois do disparo (se conserva).

Considerem o eixo Ox para a direita como o sentido positivo. Inicialmente, o sistema está em repouso de modo que os momentos lineares da granada e do lança-granadas são nulos. Depois de disparada, o componente horizontal do momento da granada é  $m_g v_g$  e do lança-granadas é  $m_l v_l$ . De acordo com a lei de conservação do momento linear:

$$\vec{p}_{gi} + \vec{p}_{li} = \vec{p}_{gf} + \vec{p}_{lf}$$

$$0 + 0 = m_g v_g + m_l v_l$$

$$0 = 0,2 \times (-300) + 10 \times v_l$$

$$v_l = 6,0 \text{ m/s}$$

O sinal negativo na velocidade  $v_g$  indica que ela aponta no sentido contrário ao eixo Ox. A energia cinética do lança-granadas é

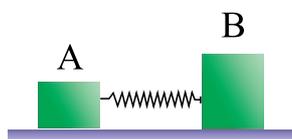
$$K_l = \frac{1}{2} m_l v_l^2 = \frac{1}{2} 10 \times 6^2 = 180 \text{ J}$$

e o seu momento linear é

$$p_{lf} = m_l v_l = 10 \times 6 = 60 \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}}$$

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

Dois blocos de massa  $m_A = 1,0$  kg e  $m_B = 3,0$  kg, como indicados na figura abaixo, estão comprimindo uma mola entre eles. Depois que o sistema é liberado a partir do repouso sobre a superfície horizontal sem atrito, a mola que possui massa desprezível, cai sobre a mesa depois de se expandir. O bloco B adquire uma velocidade de 1,20 m/s. Qual a velocidade adquirida pelo bloco A? Qual a energia cinética total dos blocos após serem liberados? Qual foi a energia potencial armazenada na mola?



**SOLUÇÃO:**

A única força horizontal existente no sistema de blocos e mola é a força da mola. Porém, esta é uma força interna do sistema. A resultante das forças externas horizontal é nula, neste caso, há conservação do momento linear horizontal. Inicialmente, os blocos estão em repouso e seus momentos lineares são nulos. Após liberados, os blocos A e B adquirem momentos lineares  $m_A v_A$  e  $m_B v_B$ , respectivamente. A mola não apresenta momento linear, pois sua massa é desprezível. De acordo com a equação (140) temos:

$$p_{Ai} + p_{Bi} = p_{Af} + p_{Bf}$$

$$0 + 0 = m_A v_A + m_B v_B$$

$$0 = 1,00 \times v_A + 3,00 \times 1,2$$

$$v_A = -3,6 \text{ m/s.}$$

O sinal negativo na velocidade do bloco A indica que ela é contrária ao sentido do eixo Ox.

A energia cinética total do sistema após liberado é a soma das energias de cada bloco:

$$K = K_A + K_B$$

$$K = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2$$

$$K = \frac{1}{2} 1,00 \times (-3,6)^2 + \frac{1}{2} 3,00 \times 1,20^2$$

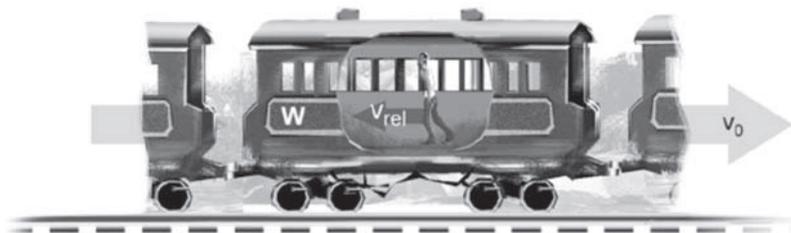
$$K = 8,64 \text{ J}$$

Neste problema, não existem forças dissipativas de forma que a energia mecânica total também se conserva ( $E_i = E_f$ ). Isto significa que a energia cinética adquirida pelos blocos é proveniente da energia potencial armazenada na mola comprimida. Dessa forma, a energia potencial armazenada na mola é exatamente igual 8,64 J.

**EXERCÍCIOS PROPOSTOS**

- A massa de um automóvel vale 1,0 tonelada.
  - Calcule a massa de um caminhão, sabendo-se que quando se desloca com o dobro da velocidade do automóvel seu movimento linear é dado por  $p = 10p_0$ , onde  $p_0$  é o momento linear do automóvel.
  - Calcule o momento linear deste caminhão quando ele se desloca com a velocidade de 36 Km/h.
- Um objeto de 5,0 kg, com velocidade de 30 m/s, atinge uma placa de aço, formando um ângulo de  $45^\circ$  e ricocheteia com a mesma velocidade e mesmo ângulo com a horizontal. Qual é a variação (módulo e direção) do momento do objeto?
- Um jogador de hóquei no gelo, de 110 kg, patina a 3,24 m/s em direção a um parapeito na margem do gelo e pára agarrando o parapeito com seus braços estendidos. Durante o processo de parada, seu centro de massa move-se 34,0 cm, aproximando-se do parapeito:
  - Determine a força média que ele exerceu no parapeito;
  - Quanta energia interna ele perdeu?
- No interior de uma canoa de massa  $m = 20$  kg existe um homem de massa  $M = 70$ . A canoa se encontra inicialmente em repouso. O homem atira um objeto de massa  $m' = 0,5$  kg numa direção paralela ao comprimento da canoa. A velocidade do objeto em relação à margem vale 5 m/s. Determine a velocidade adquirida pela canoa imediatamente após o lançamento do objeto.

5. Um vagão de estrada de ferro, de peso  $W$ , pode mover-se sem atrito ao longo de um trilho horizontal reto. Inicialmente, um homem de peso  $w$  está em pé no vagão, que se move para a direita com velocidade  $v_0$ . Qual será a variação na velocidade do vagão se o homem correr para a esquerda, de modo que sua velocidade relativa ao vagão seja  $v_{rel}$  imediatamente antes de ele pular para fora do vagão na extremidade esquerda?



6. Uma espingarda atira 10 balas de 10,0 g por segundo com velocidade de 500 m/s. As balas param no interior de uma parede rígida.
- Ache o momento linear de cada bala.
  - Calcule a energia cinética de cada bala.
  - Qual é a força média exercida pelas balas sobre a parede?
7. Uma metralhadora atira várias balas de 60 g com velocidade de 1000 m/s. Suponha que a frequência da saída das balas seja de 250 balas por minuto. Calcule a força média exercida pelo atirador para sustentar a metralhadora.
8. Um corpo de massa igual a 7,0 kg se desloca com velocidade de 6,0 m/s na ausência de forças externas. Num dado instante o corpo explode e se divide em dois fragmentos de massas iguais. Com a explosão uma energia cinética de 126 J é comunicada ao sistema constituído pelos dois fragmentos. Os fragmentos se deslocam ao longo da mesma linha reta do deslocamento antes da explosão. Determine:
- A energia cinética total antes da explosão,
  - A energia cinética total depois da explosão,
  - A velocidade e o sentido do movimento de cada fragmento depois da explosão.
9. Um núcleo radioativo, inicialmente em repouso, desintegra-se, emitindo um elétron e um neutrino, em direções perpendiculares uma à outra. O momento linear do elétron é  $1,2 \times 10^{-22}$  kg . m/s e a do neutrino é  $6,4 \times 10^{-23}$  kg . m/s.
- Ache a direção e o módulo do movimento adquirido pelo núcleo ao recuar.
  - A massa do núcleo residual é  $5,8 \times 10^{-26}$  kg. Qual é a energia cinética do recuo?

## 7.6. Colisões

As pessoas costumam associar o termo colisão a algum desastre envolvendo automóveis. Porém, estenderemos o sentido desta palavra para que também inclua qualquer interação entre dois corpos com uma duração relativamente curta, quando as forças entre os corpos forem muito maiores que as forças externas. Neste caso, podemos desprezar completamente as forças externas e considerar o sistema isolado. Então, existe conservação do momento linear na colisão, ou seja, o momento linear total do sistema é o mesmo antes e depois da colisão. Um bom exemplo disto é observado no impacto de bolas de bilhar ou na colisão de dois carros em um cruzamento.

Quando soltamos uma bola de pingue-pongue no solo, observamos que ela retorna, aproximadamente, a mesma altura de quando foi largada. Isto acontece porque a velocidade (energia cinética) antes e depois da colisão com o solo é aproximadamente igual. O mesmo não ocorre quando uma almôndega cai do seu prato. Neste caso, a almôndega não retorna a mesma altura, ou seja, ela perde velocidade após a colisão com o solo. Classificamos, assim, as colisões de acordo com a energia cinética do sistema antes e depois da colisão.

## 7.6.1 Colisões Elásticas

Dizemos que a colisão é elástica quando a energia cinética do sistema antes e depois da colisão for a mesma. Neste caso, a energia cinética se conserva. Aplicando as leis de conservação do momento linear e da energia cinética a uma colisão de duas partículas 1 e 2, por exemplo, temos:

$$m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f} \quad (\text{Momento linear}) \quad (141)$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \quad (\text{Energia cinética}) \quad (142)$$

Um bom exemplo de colisão elástica é o choque de bolas de bilhar. Lembre-se que a equação (141) é vetorial, então ela pode ser decomposta nos três eixos cartesianos resultando assim em três equações independentes.

## 7.6.2 Colisões Inelásticas

Quando a energia cinética do sistema não se conserva, ou seja, a energia cinética antes da colisão não é igual à energia cinética depois da colisão dizemos que a colisão é inelástica. Neste caso, somente poderemos aplicar a lei de conservação do momento linear dado pela equação (141). Sendo esta equação vetorial, podemos ter três equações independentes associadas aos eixos x, y e z.

Geralmente, problemas de colisões envolvem um número de incógnitas maior que três. Neste caso, precisamos de informações adicionais para que o problema possa ser solucionado.

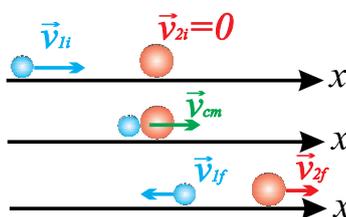
Fixaremos nossa atenção aqui a exemplos simples, com um número de incógnitas menor, nas quais as partículas permanecem juntas após o impacto. Esse tipo de colisão é chamado de **completamente inelástica**.

É o que acontece quando vocês jogam uma massa de modelar na parede e ela fica presa lá. A maior parte energia cinética que a massa tinha antes do impacto se perde. Outro exemplo é o choque entre dois carros em um cruzamento quando eles permanecem unidos após o impacto. A energia cinética final, com os carros unidos, é menor que a energia deles antes do impacto. Assim, temos uma colisão completamente inelástica.

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

Considerem a colisão frontal de duas bolas. Seja  $m_1 = 40 \text{ g}$  e  $m_2 = 60 \text{ g}$  as massas das bolas 1 e 2. Suponham que a bola 2 estava em repouso quando foi atingida pela bola 1 a  $v_{1i} = 2,5 \text{ m/s}$ .

- Quais as velocidades finais das partículas após a colisão?
- Qual a velocidade do centro de massa do sistema formado pelas partículas 1 e 2?



## SOLUÇÃO:

Usamos as equações (141 e 142) para calcular as velocidades das bolas após a colisão elástica. O movimento é apenas em uma dimensão, assim simplificamos a resolução usando a componente x da equação (141) e considerando todas as velocidades ao longo do eixo Ox:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

$$40 \times 2,5 + 60 \times 0 = 40 \times v_{1f} + 60 \times v_{2f}$$

$$40v_{1f} + 60v_{2f} = 100$$

$$v_{2f} = \frac{100 - 40v_{1f}}{60}$$

Substituindo este resultado na equação (142) temos:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

$$\frac{1}{2} 40 \times 2,5^2 + \frac{1}{2} 60 \times 0^2 = \frac{1}{2} 40 \times v_{1f}^2 + \frac{1}{2} 60 \times \left( \frac{100 - 40v_{1f}}{60} \right)^2$$

Simplificando esta equação encontramos:

$$12v_{1f}^2 - 24v_{1f} - 15 = 0$$

Esta equação de segundo grau apresenta duas soluções:  $v_{1f}' = 2,5$  m/s e  $v_{1f}'' = -0,5$  m/s. A primeira solução não será nossa resposta, pois tem o mesmo valor e sentido da velocidade inicial da bola 1. Assim, a resposta correta é  $v_{1f}'' = -0,5$  m/s, onde o sinal negativo indica que a bola 1 inverte o sentido após colidir com a bola 2, como indicado na figura. A velocidade final da bola 2 é:

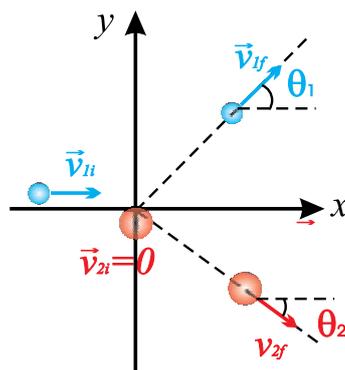
$$v_{2f} = \frac{100 - 40v_{1f}}{60} = \frac{100 - 40 \times (-0,5)}{60}$$

$$v_{2f} = 2,0 \text{ m/s.}$$

Observem que após a colisão, a bola 1 inverte o sentido, enquanto a bola 2 que estava inicialmente em repouso ganha uma velocidade no sentido do eixo Ox. Isto acontece porque a bola 1 possui massa menor que a bola 2. Vocês podem demonstrar que se a bola 1 tivesse massa maior que a bola 2, após a colisão, ambas se movimentariam para a direita. Por outro lado, se a bola 2 tivesse massa muito maior que a bola 1, ela permaneceria parada e a bola 1 retornaria, após o impacto, com o mesmo valor da velocidade inicial, como por exemplo, quando vocês jogam uma bolinha de pingue-pongue na parede. A bolinha bate e volta, pois a massa da parede é muito maior.

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

Considerem agora que a colisão do exercício anterior não é frontal. Seja  $m_1 = 40$  g e  $m_2 = 60$  g as massas das bolas 1 e 2. Suponham que a bola 2 estava em repouso quando foi atingida pela bola 1 a  $v_{1i} = 2,5$  m/s. Depois da colisão verifica-se que a velocidade da bola 1 é  $v_{1f} = 1,5$  m/s com uma direção que forma um ângulo de  $\theta_1 = 30^\circ$  com a direção inicial. Qual é a velocidade final da bola 2?



**SOLUÇÃO:**

Como não há forças externas atuando sobre as bolas na direção do plano, o momento linear total das duas partículas se conserva. Usamos a equação (141) para calcular a velocidade da bola 2 após a colisão. Observem que a bola 1 acerta a bola 2 de raspão, com isso elas tomam direções diferentes após o impacto. O movimento agora é em duas dimensões, então resolvemos a equação (141) para as direções x e y. Na direção x, a equação (141) torna-se:

$$m_1 v_{1i}^x + m_2 v_{2i}^x = m_1 v_{1f}^x + m_2 v_{2f}^x$$

Antes da colisão os vetores velocidades têm somente componentes no eixo Ox ( $v_{1i}^x = v_{1i}$  e  $v_{2i}^x = v_{2i} = 0$ ). Assim,

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} \cos \theta_1 + m_2 v_{2f} \cos \theta_2$$

$$40 \times 2,5 + 60 \times 0 = 40 \times 1,5 \cos 30^\circ + 60 \times v_{2f} \cos \theta_2$$

$$v_{2f} \cos \theta_2 = 0,8 \text{ m/s}$$

Na direção y, a equação (141) torna-se:

$$m_1 v_{1i}^y + m_2 v_{2i}^y = m_1 v_{1f}^y + m_2 v_{2f}^y$$

$$m_1 v_{1i}^y + m_2 v_{2i}^y = m_1 v_{1f} \text{sen} \theta_1 + m_2 v_{2f} \text{sen} \theta_2$$

$$40 \times 0 + 60 \times 0 = 40 \times 1,5 \text{sen} 30^\circ + 60 \times v_{2f} \text{sen} \theta_2$$

$$v_{2f} \text{sen} \theta_2 = -0,5 \text{ m/s}$$

Dividindo os dois resultados encontrados temos

$$\frac{\text{sen} \theta_2}{\cos \theta_2} = \tan \theta_2 = \frac{-0,5}{0,8} = -0,63$$

$$\theta_2 = \arctan(-0,63) = -32^\circ$$

Este é o ângulo formado entre o vetor velocidade da partícula 2 e o eixo Ox. Substituindo esse ângulo em qualquer dos resultados anteriores, encontramos o módulo deste vetor:

$$v_{2f} \text{sen} \theta_2 = -0,5$$

$$v_{2f} \text{sen}(-32^\circ) = -0,5$$

$$v_{2f} = 0,94 \text{ m/s.}$$

**EXERCÍCIO RESOLVIDO**

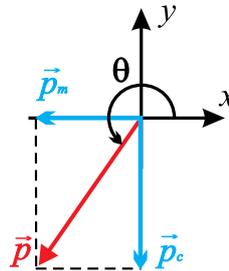
Uma moto com massa de 500 kg se desloca do leste para o oeste quando colide em um cruzamento com um carro de 1000 kg que viajava do norte para o sul com uma velocidade de 20 km/h. A moto tinha uma velocidade de 30 km/h e após a colisão ambos permaneceram unidos. Desprezando o atrito com o solo responda:

- Qual era o momento linear total imediatamente antes da colisão?
- Qual a velocidade de ambos imediatamente após a colisão?

**SOLUÇÃO:**

(a) Na figura, temos o sistema de eixos coordenados onde indicamos os momentos lineares do carro,  $\vec{p}_c = m_c \vec{v}_c$ , e da moto,  $\vec{p}_m = m_m \vec{v}_m$ . O momento total inicial é a soma vetorial desses dois momentos:

$$\vec{p} = \vec{p}_c + \vec{p}_m$$



As componentes do momento linear total são:

$$p^x = p_c^x + p_m^x = m_c v_c^x + m_m v_m^x$$

$$p^x = 0 + 500 \times (-30) = -15000 \text{ kg.m/s}$$

$$p^y = p_c^y + p_m^y = m_c v_c^y + m_m v_m^y$$

$$p^y = 1000 \times (-20) + 0 = -20000 \text{ kg.m/s}$$

O módulo de  $\vec{p}$  é

$$p = \sqrt{(-15000)^2 + (-20000)^2} = 25000 \text{ kg.m/s}$$

e sua direção e sentido são indicados na figura, onde o ângulo  $\theta$  é dado por:

$$\theta = \arctan\left(\frac{p^y}{p^x}\right) = \arctan\left(\frac{-20000}{-15000}\right)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{p^y}{p^x}\right) = \arctan\left(\frac{-20000}{-15000}\right) = 53,13^\circ$$

O ângulo correto, como indicado na figura, é o complementar  $\theta = 180^\circ + 53,13^\circ = 233,13^\circ$ .

(b) Como não há forças externas atuando no sistema (carro e moto) na direção do plano formado pela pista, o momento linear total se conserva. Sendo assim,  $\vec{p}_i = \vec{p}_f$ . Após a colisão a moto e carro seguem juntos como um só corpo de massa  $m_c + m_m$ . Assim, usando o momento linear total calculado no item (a) temos:

$$p_i = p_f$$

$$p_i = (m_c + m_m)v_f$$

$$v_f = \frac{p_i}{m_c + m_m}$$

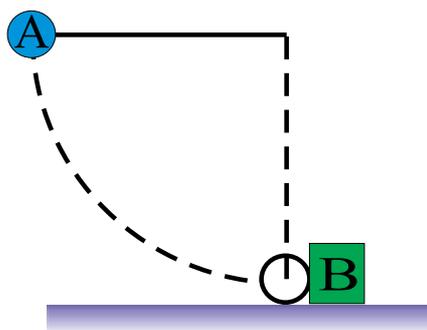
$$v_f = \frac{25000}{1000 + 500} = 16,67 \text{ m/s.}$$

A velocidade do conjunto após o impacto possui a mesma direção e sentido do momento linear total calculado no item (a), como indicado na figura,  $\theta = 233,13^\circ$ .

## EXERCÍCIO RESOLVIDO

Um pêndulo é formado por uma bola de 1,5 kg de massa preso a uma corda de 80 cm de comprimento. Vocês colocam o pêndulo com a corda esticada na posição horizontal e em seguida larga a bola. Na parte mais baixa de sua trajetória, a bola atinge um bloco de 0,5 kg em repouso sobre uma superfície sem atrito. Sendo a colisão elástica, determinem:

- a) a velocidade da bola imediatamente antes do impacto,
- b) a velocidade da bola imediatamente depois do impacto,
- c) a velocidade do bloco imediatamente depois do impacto.



### SOLUÇÃO:

- (a) Quando largamos a bola da altura  $y = 80\text{cm} = 0,8\text{m}$  ela descreve a trajetória semicircular e se choca no ponto mais baixo com velocidade  $v_{Ai}$  no bloco em repouso. Neste percurso, a energia mecânica total da bola se conserva,  $E = \text{const.}$  No ponto mais alto, a bola possui apenas energia potencial gravitacional,  $U_g = mgy$ . Imediatamente, antes do choque a bola possui apenas energia cinética,  $K = \frac{1}{2}m_A v_{Ai}^2$ . Assim, de acordo com a lei de conservação de energia:

$$U_g = K$$

$$mgy = \frac{1}{2}m_A v_{Ai}^2$$

$$v_{Ai} = \sqrt{2gy} = \sqrt{2 \times 9,8 \times 0,8}$$

$$v_{Ai} = 3,96 \text{ m/s}$$

- (b) Não existem forças externas na direção horizontal, assim, o momento linear total e a energia cinética do sistema se conservam na colisão. Usando a equação (141)

$$m_A v_{Ai} + m_B v_{Bi} = m_A v_{Af} + m_B v_{Bf}$$

$$1,5 \times 3,96 + 0 = 1,5 \times v_{Af} + 0,5 \times v_{Bf}$$

$$v_{Bf} = 11,88 - 3v_{Af}$$

e a equação (142)

$$\frac{1}{2}m_A v_{Ai}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{Bi}^2 = \frac{1}{2}m_A v_{Af}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{Bf}^2$$

$$\frac{1}{2}1,5 \times 3,96^2 + 0 = \frac{1}{2}1,5 \times v_{Af}^2 + \frac{1}{2}0,5 \times (11,88 - 3v_{Af})^2$$

$$6v_{Af}^2 - 35,64v_{Af} + 47,04 = 0$$

Esta equação do segundo grau apresenta duas raízes:  $v'_{Af} = 3,96 \text{ m/s}$  e  $v''_{Af} = 1,98 \text{ m/s}$ . Analisando as duas respostas, vemos que a primeira não pode ser solução, pois ela é igual a velocidade da bola antes da colisão. Isso é fisicamente impossível. Assim, a velocidade da bola após o impacto é  $v_{Af} = 1,98 \text{ m/s}$ .

(c) Substituindo a velocidade  $v_{Af}$  encontrada, em alguma das equações do item anterior temos:

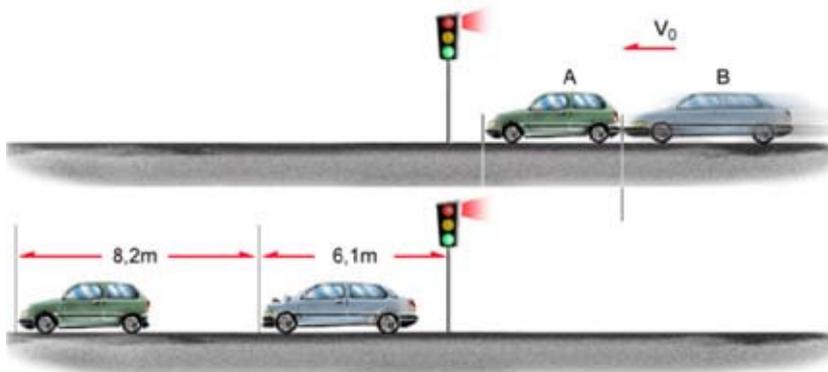
$$v_{Bf} = 11,88 - 3v_{Af}$$

$$v_{Bf} = 11,88 - 3 \times 1,98 = 5,94 \text{ m/s}.$$

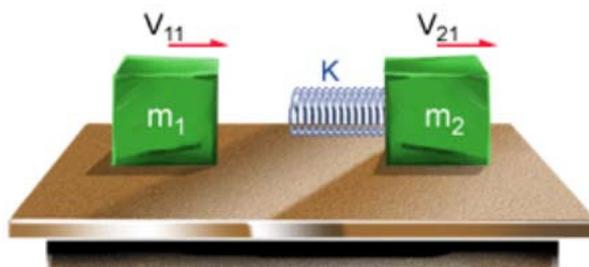
A velocidade adquirida pelo bloco é maior que a velocidade da bola, pois sua massa é menor.

## EXERCÍCIOS PROPOSTOS

21. Dois carros A e B deslizam numa estrada coberta de gelo quando tentam parar num semáforo. O carro A tem massa de 1.100 kg e a de B é de 1.400 kg. O coeficiente de atrito cinético entre a estrada e as rodas travadas de ambos os carros é 0,130. O carro A consegue parar no semáforo, mas não o B, que bate na traseira de A. Após a colisão, A pára 8,20 m após o ponto de impacto e B a 6,10 m deste. Os freios dos dois carros ficaram bloqueados durante todo o acidente.
- A partir da distância que cada carro percorreu após o choque, determine a velocidade de cada um imediatamente após o impacto.
  - Aplice a conservação do momento para determinar a velocidade de B ao atingir A. com base em quê pode ser criticada a aplicação da conservação do momento neste caso?

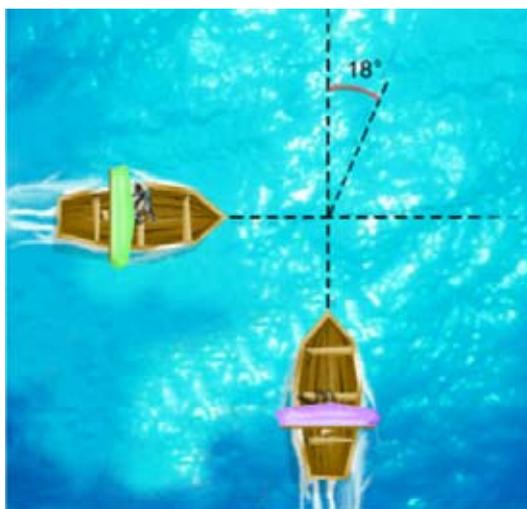


22. Um bloco de massa  $m_1 = 1,88 \text{ kg}$  desliza ao longo de uma superfície sem atrito com velocidade de 10,3 m/s. Diretamente em frente dele, e movendo-se no mesmo sentido, há um bloco de massa  $m_2 = 4,92 \text{ kg}$ , cuja velocidade é de 3,27 m/s. Uma dada mola de massa desprezível, cuja constante elástica vale  $k = 11,2 \text{ N/cm}$  está presa à traseira de  $m_2$ , conforme a Figura. Quando os blocos se chocam, qual a compressão máxima da mola? (Sugestão: No momento de compressão máxima da mola, os dois blocos se movem juntos e o choque é completamente inelástico nesse ponto; calcule então a velocidade comum.)



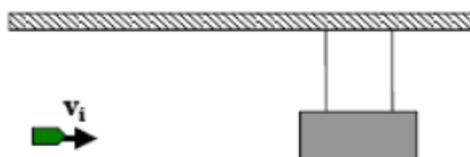
23. Uma barca de  $1,50 \times 10^4$  kg desce um rio (para a direita) a  $6,20$  m/s sob denso nevoeiro quando se choca de lado com outra que cruza o rio, conforme a Figura. A segunda barca tem massa  $2,78 \times 10^4$  kg e velocidade de  $4,30$  m/s. Imediatamente após o impacto, a segunda barca verifica que seu curso foi desviado  $18,0^\circ$  no sentido rio abaixo e sua velocidade aumentada para  $5,10$  m/s. A correnteza era praticamente nula no momento do acidente.

- a) Qual a velocidade e direção do movimento da primeira barca imediatamente após o choque?  
 b) Quanta energia cinética foi perdida na colisão?



24. Uma bala de  $10$  g é disparada sobre um pêndulo balístico de massa  $990$  g.

- a) Se a velocidade inicial da bala é  $300$  m/s, qual a altura atingida pelo pêndulo (junto com a bala) depois da colisão?  
 b) Se a velocidade inicial da bala é  $200$  m/s, determine a altura máxima atingida pelo pêndulo quando a bala passa através dele e emerge com velocidade de  $50$  m/s.



25. Um vagão de  $20$  toneladas está freando no topo de uma descida. Quando o carro é solto, ele desce  $9$  m em relação à posição original. Na parte mais baixa da ladeira, ele engata em outro vagão, de  $10$  toneladas, que está livre nos trilhos; os dois, engatados, sobem até uma altura  $H$ . Calcular  $H$ .
26. Um corpo de massa  $m_1 = 4$  kg, deslocando-se a  $5$  m/s, efetua uma colisão perfeitamente elástica com um corpo de massa  $m_2 = 1$  kg, inicialmente em repouso. Determine as velocidades finais de cada corpo e a energia transferida para o corpo de  $1$  kg.
27. Durante a madrugada, um carro de luxo de massa igual a  $2.400$  kg, bate na traseira de um carro de massa total  $1.200$  kg, que estava parado. O motorista do carro de luxo alega que o outro estava com as luzes apagadas, e que ele vinha reduzindo a marcha ao aproximar-se do sinal, estando a menos de  $10$  km/h quando o acidente ocorreu. A perícia constatou que o carro de luxo arrastou o outro de uma distância igual a  $10,5$  m, e estimou que o coeficiente de atrito cinético com a estrada no local do acidente era  $0,6$ . Calcule a que velocidade o carro de luxo vinha realmente correndo?
28. Um caminhão carregado, de massa  $M = 3$  ton, viajando para o norte a  $60$  km/h, colide com um carro de massa total  $1$  ton, trafegando para leste a  $90$  km/h, num cruzamento. Calcule em que direção e de que distância o

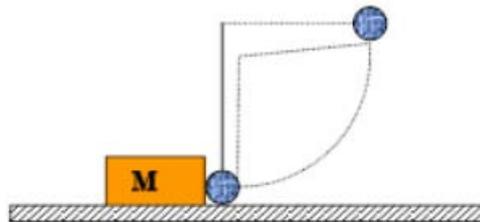
carro é arrastado pelo caminhão, sabendo que o coeficiente de atrito cinético no local do acidente é 0,5.

29. Uma bala de massa igual a 4,5 g é disparada horizontalmente num bloco de madeira de massa igual a 2,4 kg, em repouso, sobre uma superfície horizontal. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície vale 0,20. A bala fica retida no bloco que sofre um deslocamento de 1,8 m até o repouso.

- a) Qual a velocidade do bloco imediatamente após a bala parar em seu interior ?  
b) Qual a velocidade inicial da bala ?

Uma bola de massa  $m = 0,5$  kg é presa a um pino por um fio leve e inextensível de 0,8 m de comprimento. A bola é abandonada quando o fio está na horizontal. Na parte mais baixa da trajetória a bola atinge um bloco de massa  $M = 2,0$  kg, inicialmente em repouso sobre uma superfície áspera, como mostra a figura abaixo. A colisão entre a bola e o bloco pode ser considerada como perfeitamente elástica. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície é  $\mu_c = 0,16$ .

- a) Qual o trabalho realizado pelas forças que atuam sobre a bola em seu movimento até a colisão?  
b) Quais as velocidades dos corpos após a colisão?  
c) Até que altura a bola sobe após a colisão?  
d) Qual a distância percorrida pelo bloco depois da colisão?



## RESPOSTAS

1. (a) 8 m, (b) 7,2 m, (c) 4,3 m, (d) 14 m; 2. No eixo Oy que passa no centro do triângulo a 58 cm do lado inferior. 3. (a)  $\vec{r}_{cm} = (1,3a ; 0,9a)$ , (b)  $\vec{r}_{cm} = (0; \frac{\sqrt{3}}{3} R)$  4.  $x_{cm} = 210$  cm,  $y_{cm} = 105$  cm; 5.  $x_{cm} = y_{cm} = 20$  cm,  $z_{cm} = 16$  cm; 6.  $-\frac{Rr^2}{R^2 - r^2}$ ; 7. 7 cm; 8. 2 cm; 9. 5 cm; 10. (a) para baixo,  $mv/(m+M)$ , (b) Estacionário; 11. 7,7 m; 12. (a) 5 toneladas, (b)  $5 \times 10^4$  kg.m/s; 13. 212,1 kg.m/s perpendicular a placa; 14. (a) 1698,40 N, (b) 577,37 J; 15.  $2,8 \times 10^{-2}$  m/s contrária a velocidade do objeto. 16.  $wv_{rel}/(w+W)$ ; 17. (a) 5 kg.m/s, (b) 1250 J, (c) 50 N; 18. 250 N; 19. (a) 126 J, (b) 252 J, (c) Um fica parado e o outro segue com 12 m/s; 20. (a)  $1,4 \times 10^{-22}$  kg.m/s a  $150^\circ$  da trajetória do elétron e a  $120^\circ$  da trajetória do neutrino. (b) 1,0 eV; 21. (a)  $v_A = 4,6$  m/s,  $v_B = 3,9$  m/s, (b) 7,5 m/s; 22. 25 cm; 23. (a) 3,43 m/s e  $\theta = -17,3^\circ$ ; (b) 95535,25 J; 24. (a) 0,45 m, (b) 0,11 m; 25. 4 m; 26.  $v_1 = 3$  m/s,  $v_2 = 8$  m/s, 32 J; 27. 60 km/h; 28. 19,94 m e  $\theta = 63,4^\circ$ ; 29. (a) 2,66 m/s, (b) 1420 m/s; 30. (a) 3,92 J, (b)  $v_m = -2,36$  m/s e  $v_M = 1,58$  m/s, (c) 0,28 m, (d) 0,8 m.

## REFERÊNCIAS

HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; KRANE, Kenneth S. **Física 1**. 5º Ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2004. vol 1.

SERWAY, Raymond A; JEWETT JR, Jonh W. **Princípios de Física: Mecânica Clássica**. 1º Ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2004. Vol 1.

NUSSENZEIG, Herch Moysés. **Curso de Física Básica**. 4º Ed. São Paulo: Editora Edgar Blucher, 2002. Vol 1.

TIPLER, Paul A; **Física: Mecânica, Oscilações, Ondas e Termodinâmica**. 5º Ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2006. vol 1.