

Árvores **Rubro**-Negra

Prof. Robinson Alves

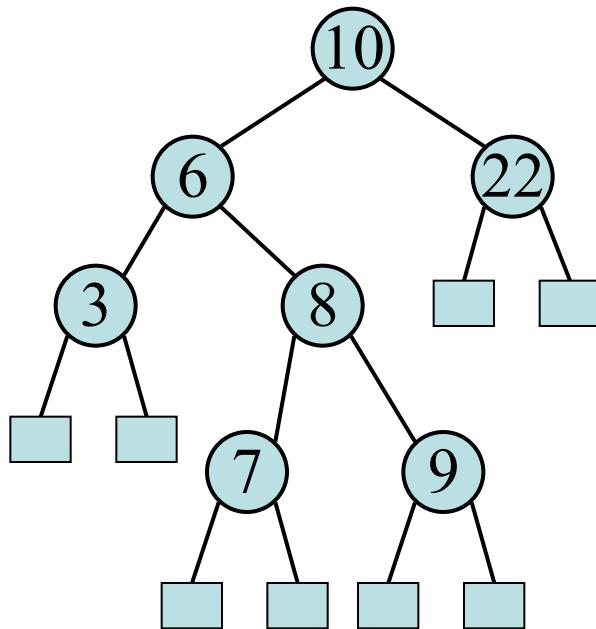
IFRN

# Árvores Rubro-Negra

- Seja  $T$  uma árvore binária de pesquisa
- Cada nó deve estar associado a uma cor **rubro** ou negra
- Uma árvore é **rubro-negra** quando as seguintes condições são satisfeitas:
  - i. Se  $v$  é nó externo ,  $v$  é negro
  - ii. O nó raiz é negro
  - iii. Se  $v$  é rubro, então ambos os filhos são negros
  - iv. Os caminhos de  $v$  para seus nós descendentes externos possuem idêntico número de nós negros

# Árvores Rubro-Negra

- Exemplo 1



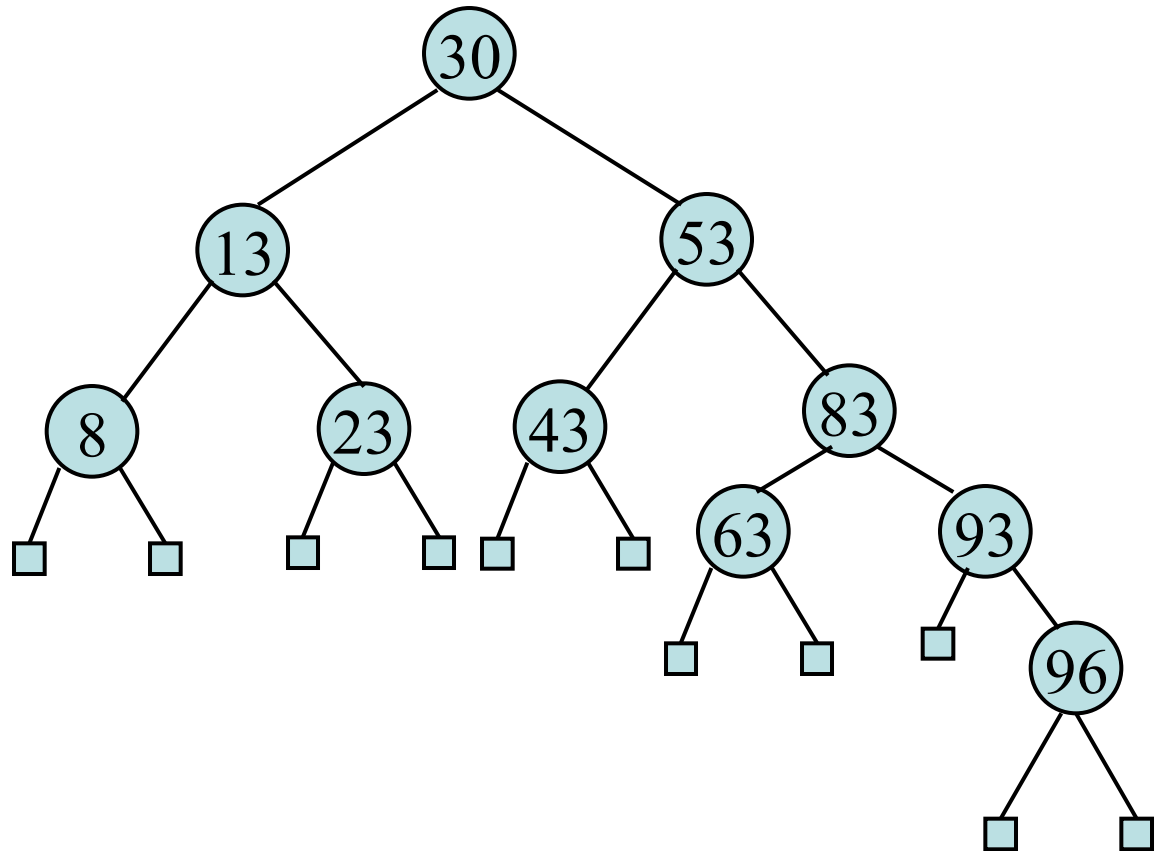
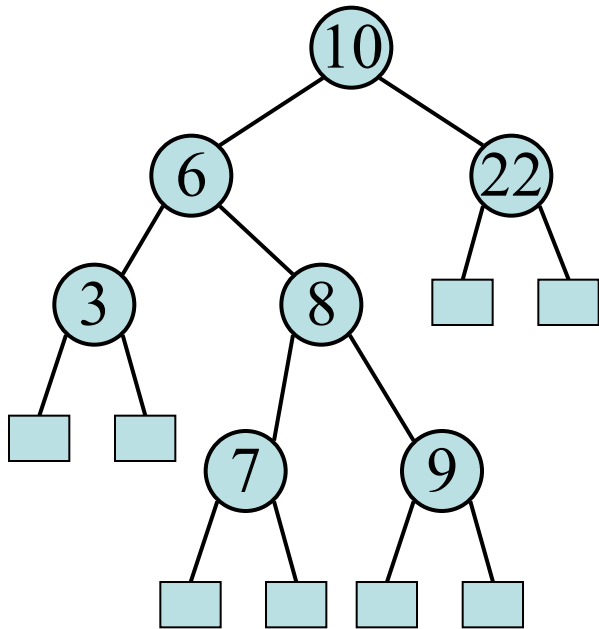
OBS.: as propriedades acima asseguram que o maior caminho desde a raiz até uma folha é no máximo duas vezes maior que o de qualquer outro caminho até outra folha, e portanto a árvore é aproximadamente balanceada e as operações básicas levarão o tempo de  $O(\log n)$

Ex.: 14,9,10,8 = 4 nós

14,17 = 2 nós

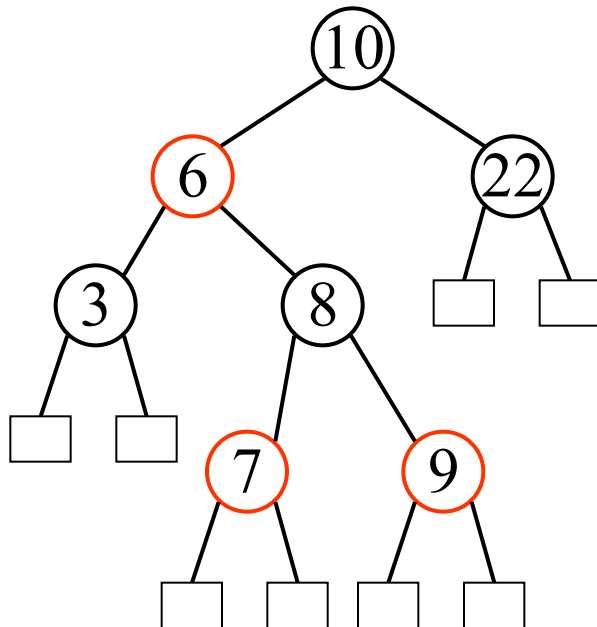
# Árvores **Rubro-Negra**

- **Exercício:** Faça a coloração dos nós das árvores abaixo de forma a não violar os 4 critérios das árvores **Rubro-Negras**



# Árvores Rubro-Negra

- Altura negra de um nó
  - É representado pelo número de nós negros encontrados até qualquer nó folha descendente



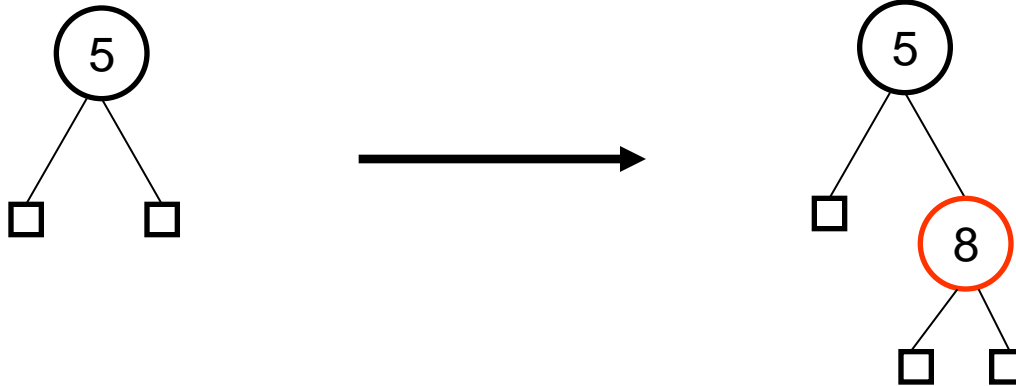
A altura negra é 2

# Inserção em Rubro-Negras

- Ao contrário da árvore AVL, temos agora vários critérios para ajustar simultaneamente
- Ao inserir um nó  $v$  numa posição vazia da árvore (nó nulo) este é pintado de rubro. Pintando o nó de rubro o critério IV é preservado, já que um nó rubro não contribui para a altura negra da árvore ( $hb(v)$ )

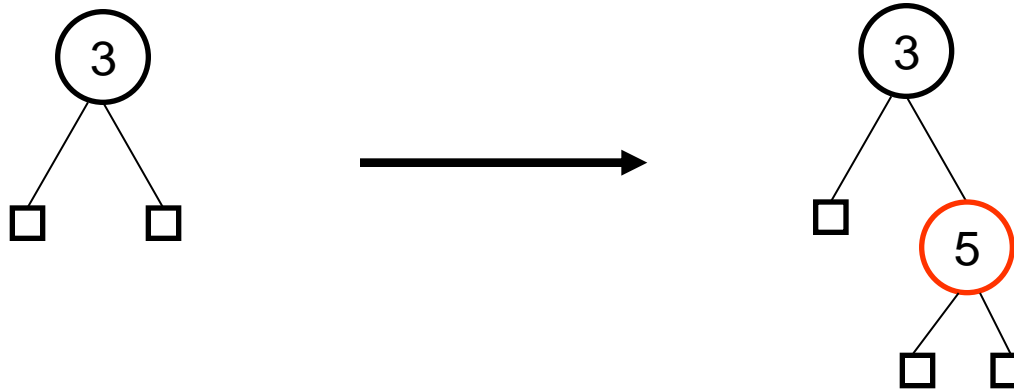
# Inserção em Rubro-Negras

- Ex.: incluir 8



# Inserção em Rubro-Negras

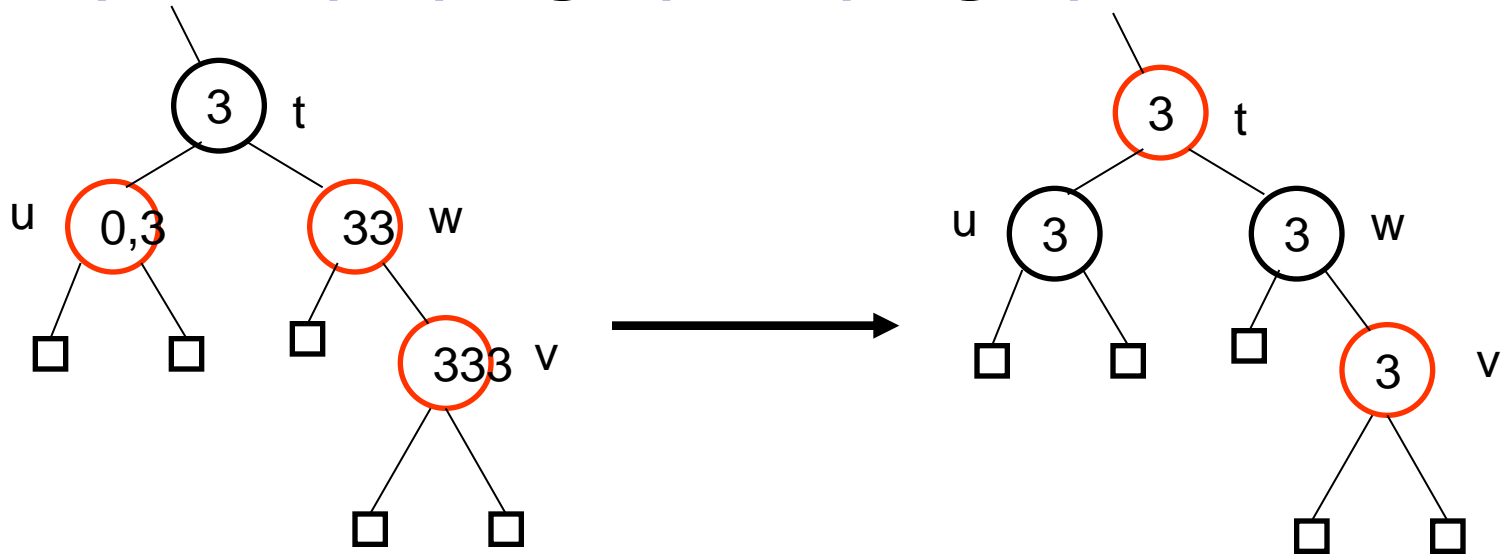
- Quando incluimos um nó em uma árvore Rubro-Negra, alguns ajustes podem ser necessários. Destacamos **três** casos:
  - Caso 1: se **w**, o pai de **v**, é negro, nada mais precisa ser feito já que o critério IV foi mantido





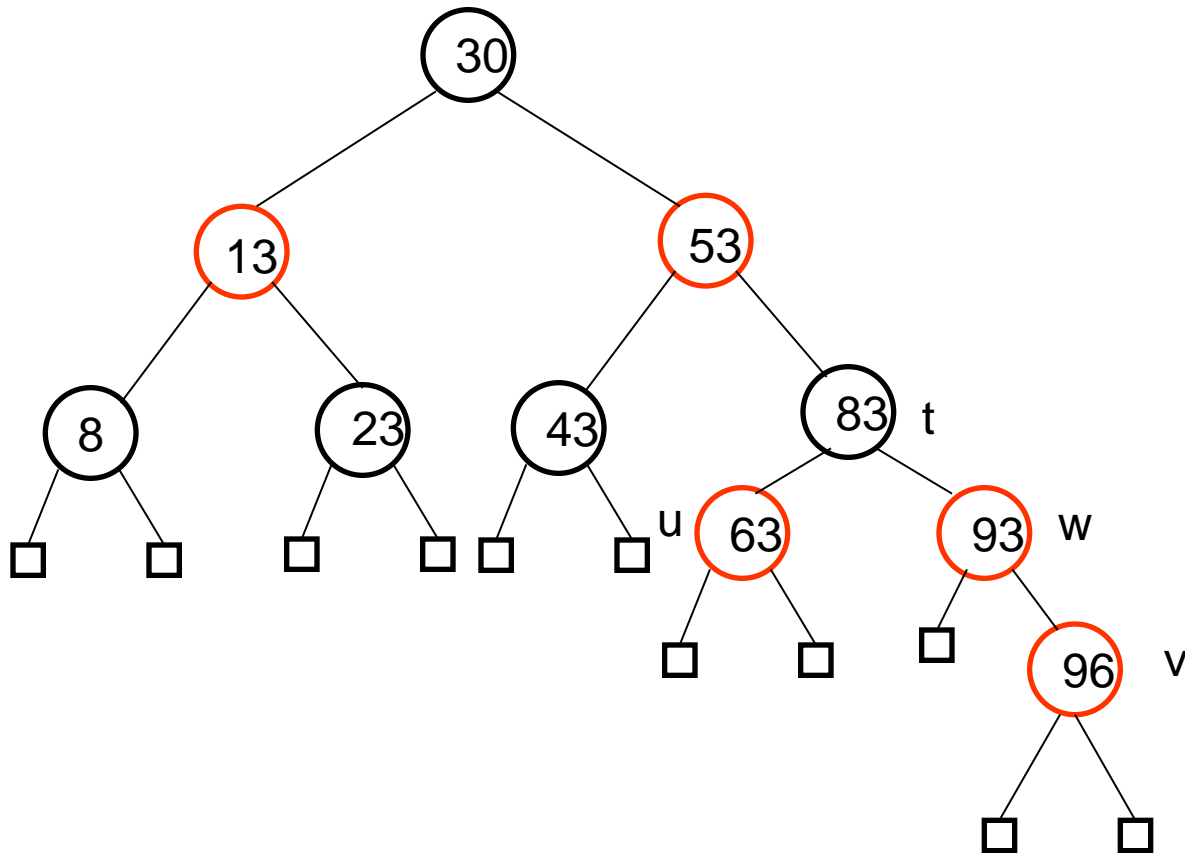
# Inserção em Rubro-Negras

- Caso 2: Suponha  $w$  (pai de  $v$ ) rubro e  $t$ , o pai de  $w$  (avó de  $v$ ) é negro. Se  $u$ , o irmão de  $w$  (tio de  $v$ ) é rubro, ainda é possível manter o critério IV apenas fazendo a re-coloração de  $t$ (Rubro),  $u$ (Negro) e  $w$ (Negro)



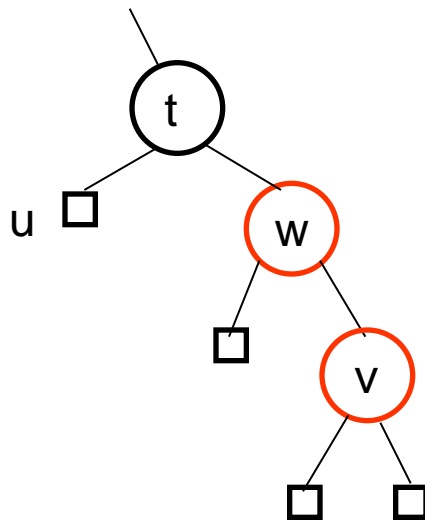
# Inserção em Rubro-Negras

- Se o pai de **t** for rubro o processo deverá ser repetido fazendo **v=t**



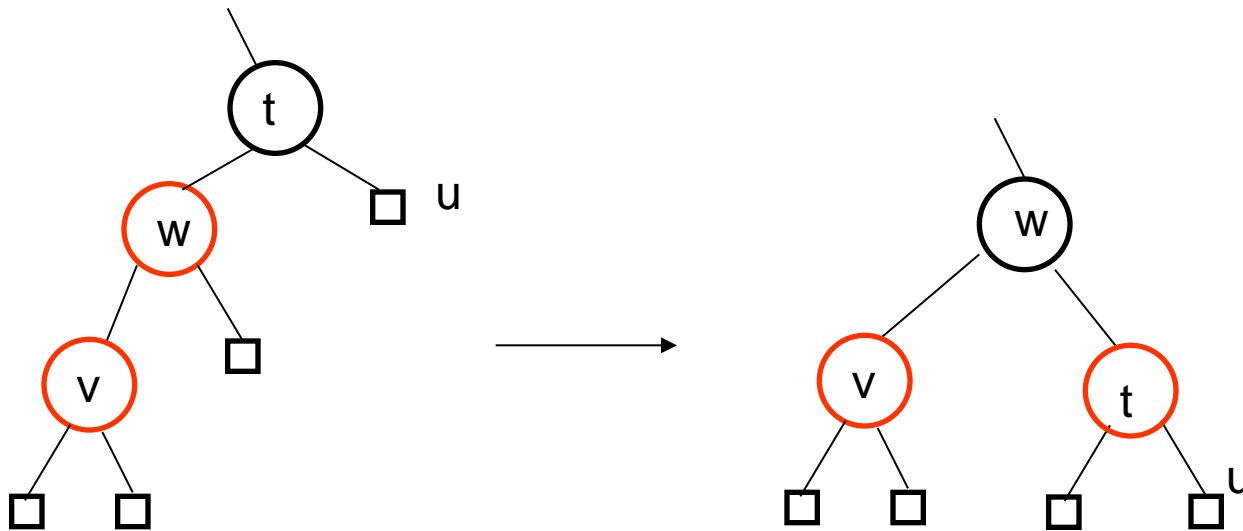
# Inserção em Rubro-Negras

- Caso 3: suponha **w** rubro, seu pai **t** é negro e seu irmão **u** é negro. Neste caso, para manter o critério III é necessário fazer rotações com **w**, **v**, **t** e **u**. Existe 4 subcasos que correspondem às 4 rotações possíveis



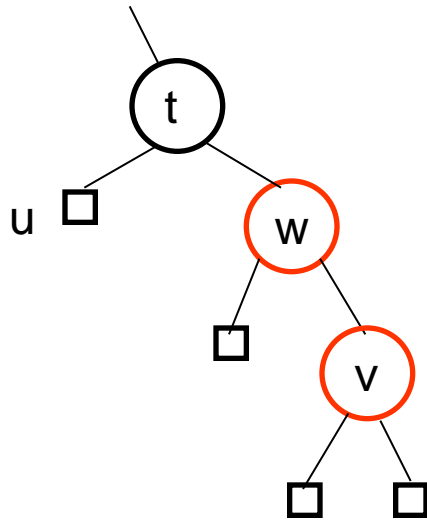
# Inserção em Rubro-Negras

– Caso 3a: Rotação direita simples



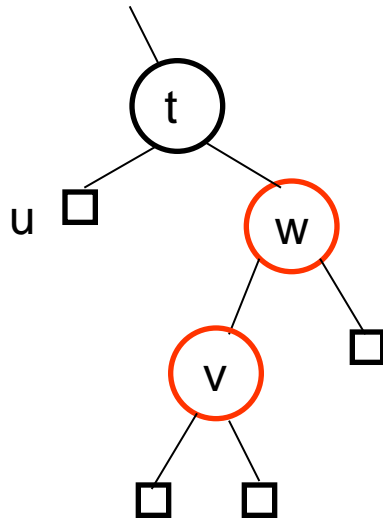
# Inserção em Rubro-Negras

- Caso 3b: Rotação esquerda simples



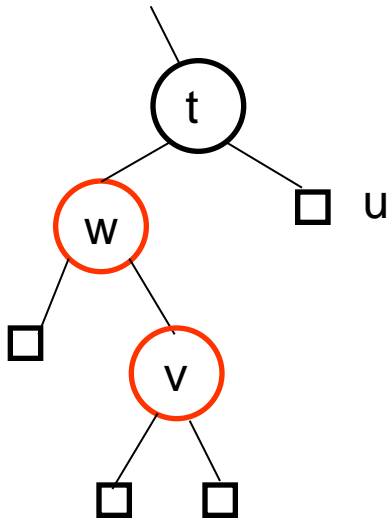
# Inserção em Rubro-Negras

- Caso 3c: Rotação esquerda dupla



# Inserção em Rubro-Negras

– Caso 3d: Rotação direita dupla



# Remoção em Rubro-Negras

- É um pouco mais complexa do que a inserção
  - Passos:
    - Encontre o nó **v** a ser removido
    - Remova o nó **v** da mesma forma que em uma árvore binária de pesquisa
    - Ajuste os critérios da árvore rubro-negra



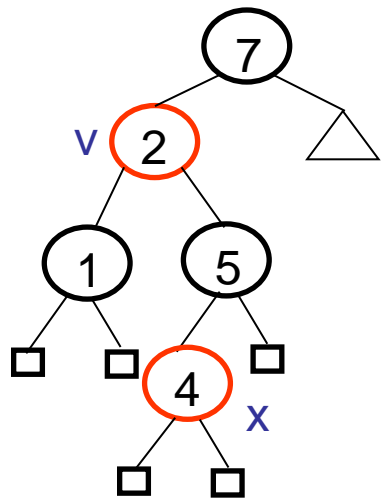
# Remoção em Rubro-Negras

- Situações
  - As situações que podem ocorrer na remoção de elementos são quatro.

Situação	v	sucessor
1	Rubro	Rubro
2	Negro	Rubro
3	Negro	Negro
4	Rubro	Negro

# Remoção em Rubro-Negras

- Situação 1 – seja  $v$  o nó a ser removido. Sendo  $v$  rubro e  $x$ , sucessor de  $v$ , também rubro

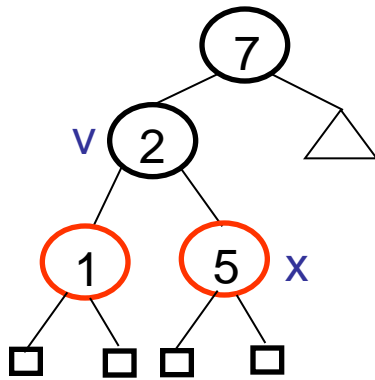


Remove 2

- Nada necessita ser feito, pois a árvore Rubro-Negra continua atendendo a todos os critérios

# Remoção em Rubro-Negras

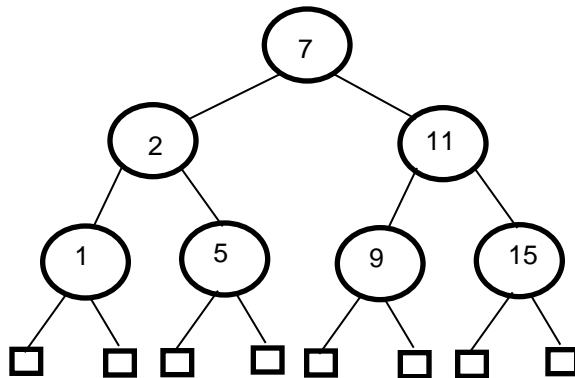
- Situação 2 – **v** é negro e **x** é rubro.
  - Pinte **x** de negro e pare.



Remove 2

# Remoção em Rubro-Negras

- Duplo Negro
  - Ocorre após a retirada de um nó negro. O **duplo negro** é uma forma de “compensar” a falta do nó removido na altura negra da árvore.



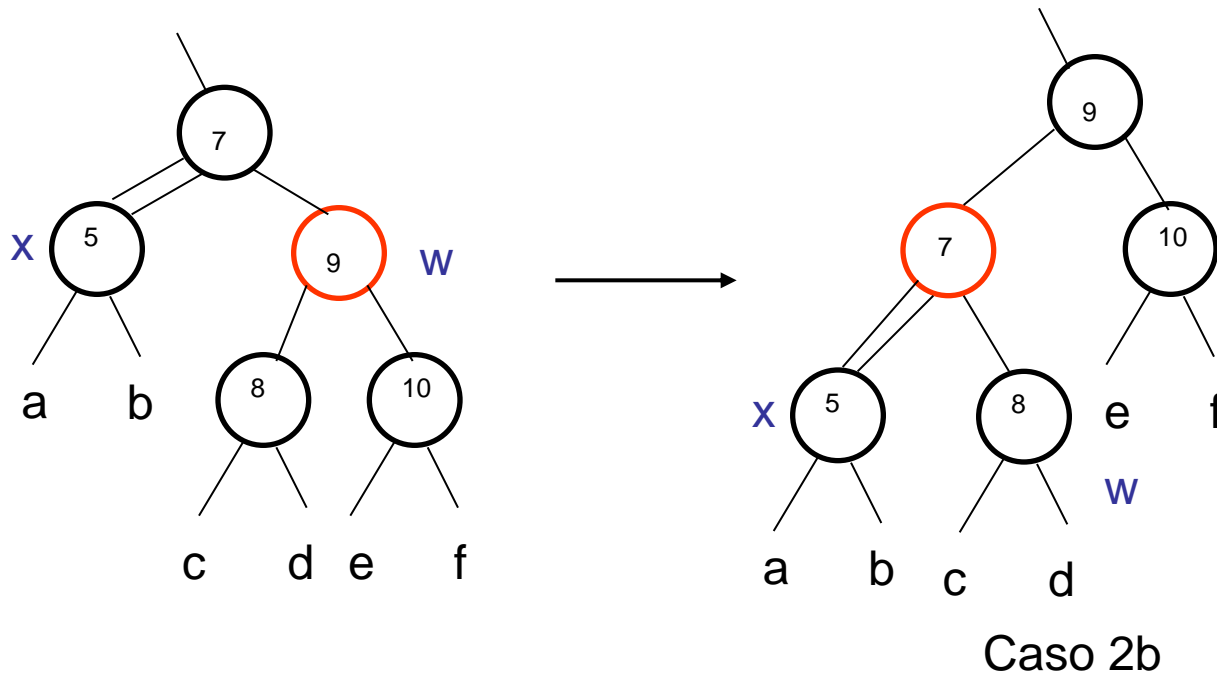
Remove 5

# Remoção em Rubro-Negras

- Situação 3 – **v** é negro e **x** é negro.
  - **Caso 1**: se **x** é negro e **x** tem irmão **w** rubro e pai negro. Marque ele com um duplo negro e faça o seguinte:
    - Faça uma rotação simples esquerda
    - Pinte **w** de negro
    - Pinte pai de **x** de rubro

# Remoção em Rubro-Negras

- Situação 3 – caso 1 - exemplo

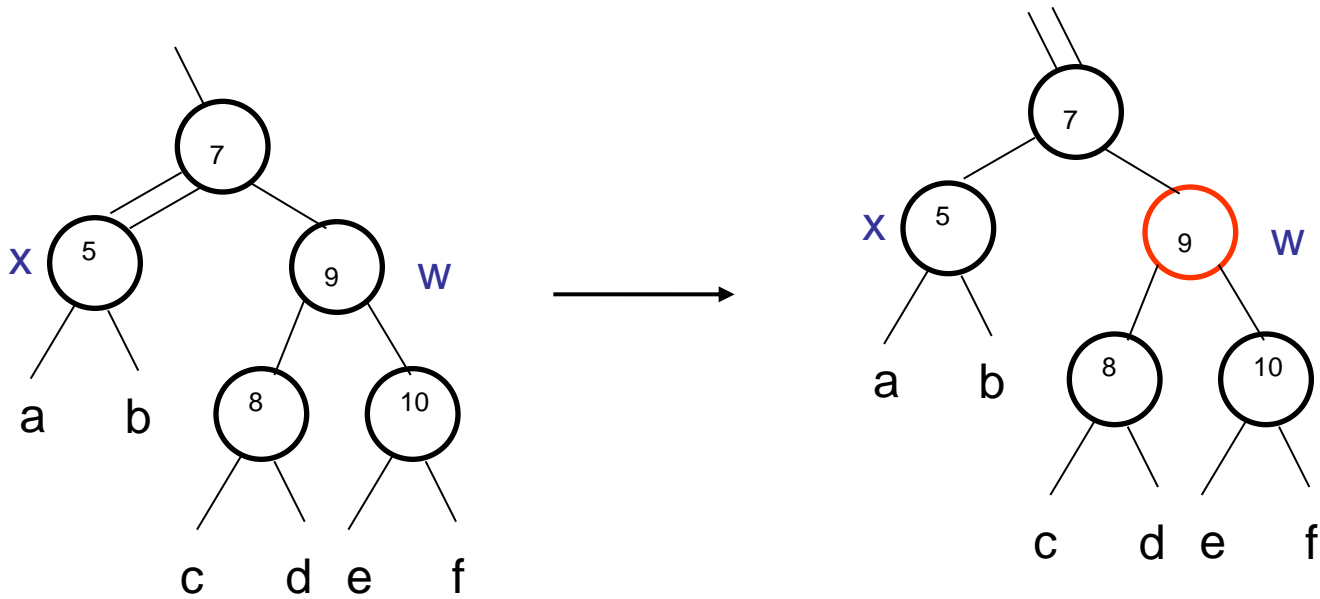


# Remoção em Rubro-Negras

- Situação 3 –  $v$  é negro e  $x$  é negro.
  - Caso 2a: se  $x$  é negro, tem irmão  $w$  negro com filhos negros e pai negro. faça o seguinte:
    - Pinte o irmão  $w$  de rubro

# Remoção em Rubro-Negras

- Situação 3 – caso 2a - exemplo



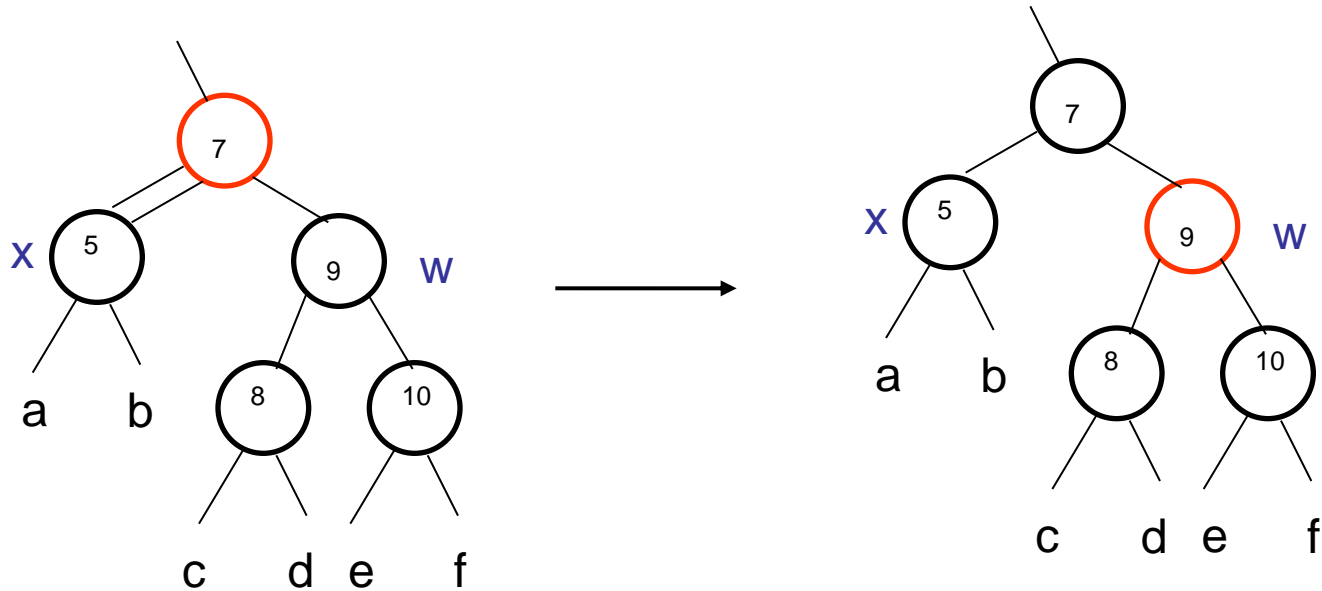


# Remoção em Rubro-Negras

- Situação 3 –  $v$  é negro e  $x$  é negro.
  - Caso 2b: se  $x$  é negro, tem irmão  $w$  negro com filhos negros e pai rubro. faça o seguinte:
    - Pinte o irmão  $w$  de rubro e o pai de  $x$  de negro

# Remoção em Rubro-Negras

- Situação 3 – **caso 2b** - exemplo

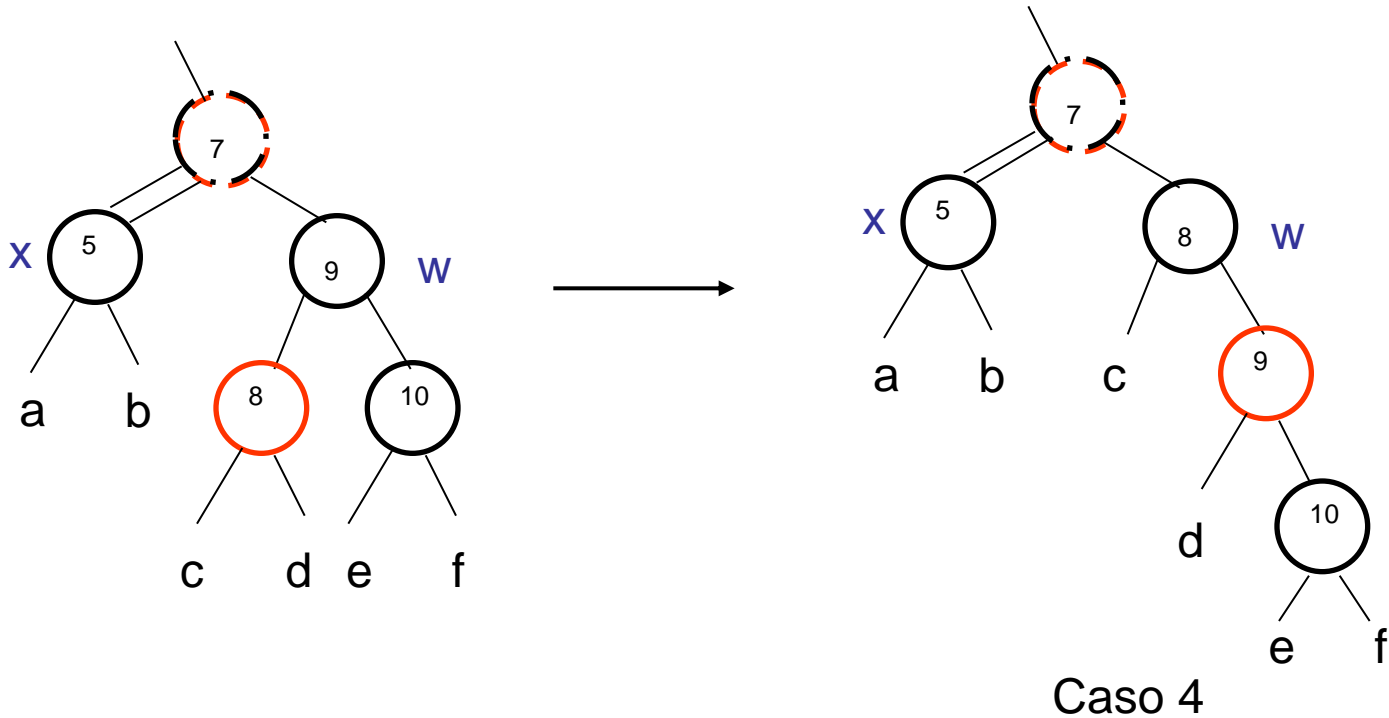


# Remoção em Rubro-Negras

- Situação 3 –  $v$  é negro e  $x$  é negro.
  - Caso 3: se  $x$  é negro, tem irmão  $w$  negro, tem pai de qualquer cor (rubro ou negro), tem irmão  $w$  com filho esquerdo rubro e irmão  $w$  com filho direito negro. faça o seguinte:
    - Rotação simples direita em  $w$
    - Trocar as cores de  $w$  com seu filho esquerdo

# Remoção em Rubro-Negras

- Situação 3 – **caso 3** - exemplo

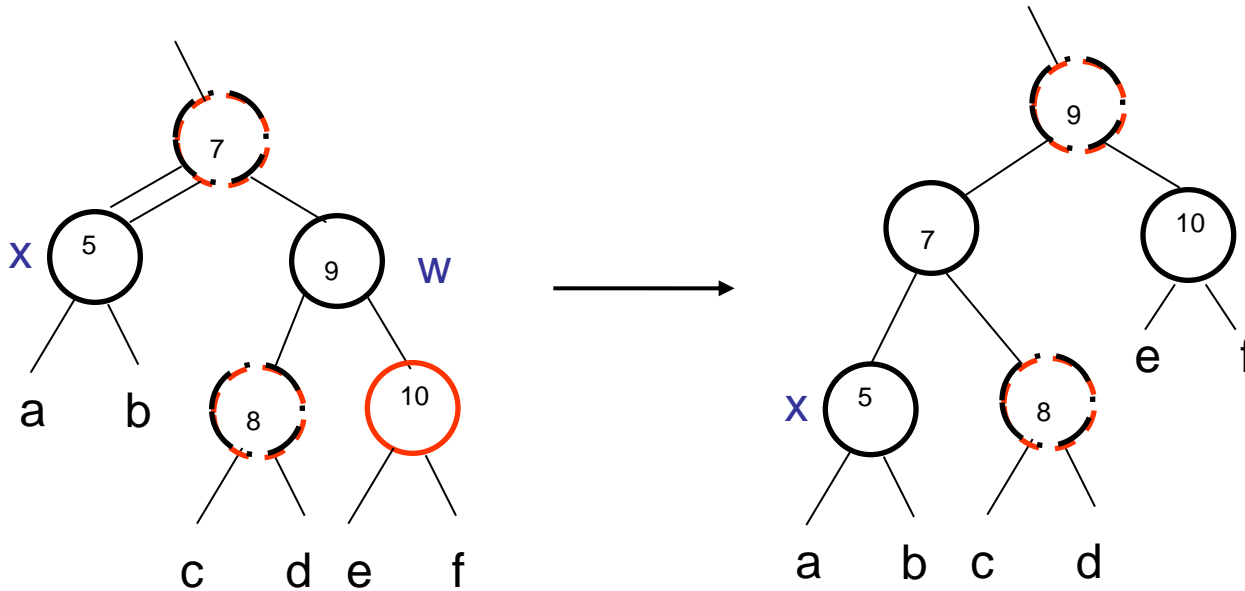


# Remoção em Rubro-Negras

- Situação 3 –  $v$  é negro e  $x$  é negro.
  - Caso 4: se  $x$  é negro, tem irmão  $w$  negro, tem pai de qualquer cor (rubro ou negro), tem irmão  $w$  com filho esquerdo qualquer cor e irmão  $w$  com filho direito rubro. faça o seguinte:
    - Rotação simples a esquerda
    - Pinte o pai de negro
    - $w$  igual a cor anterior do pai de  $x$
    - Pinte o filho direito de  $w$  de negro

# Remoção em Rubro-Negras

- Situação 3 – **caso 4** - exemplo

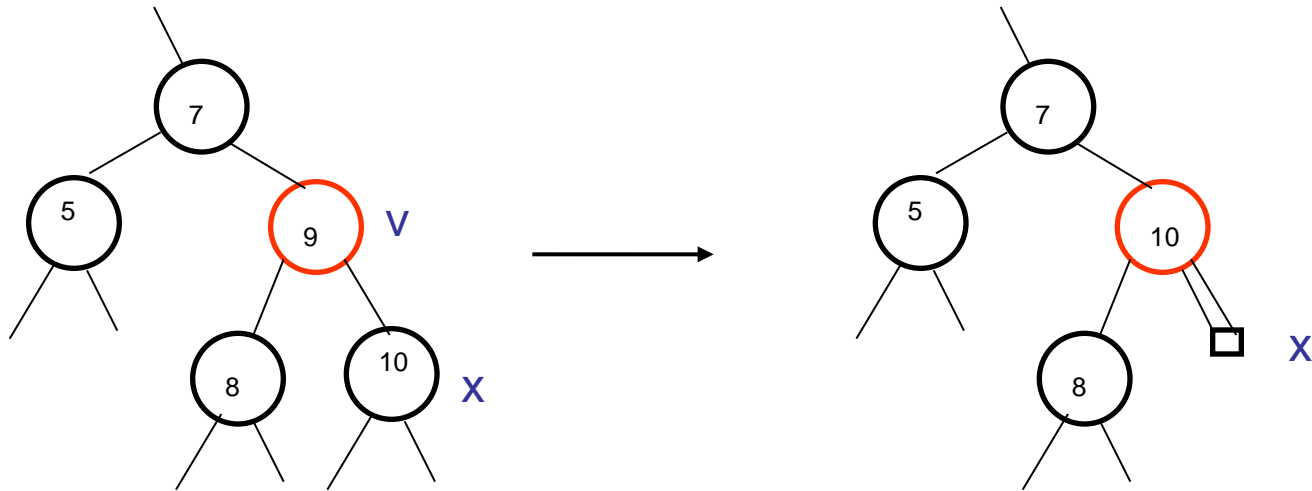


# Remoção em Rubro-Negras

- Situação 4 –  $v$  é rubro e  $x$  é negro.
  - Similar à situação 3. faça o seguinte:
    - Pinte  $x$  de rubro
    - Proceda como na situação 3

# Remoção em Rubro-Negras

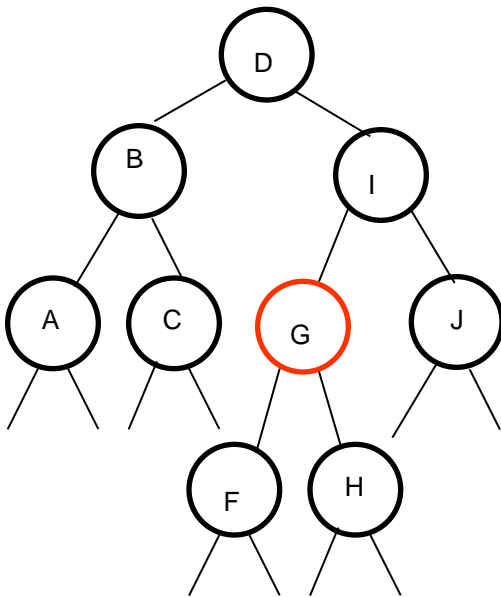
- Situação 4 – exemplo





# Remoção em Rubro-Negras

- Exercício 1: remover C



# Remoção em Rubro-Negras

- Exercício 2: remover B

