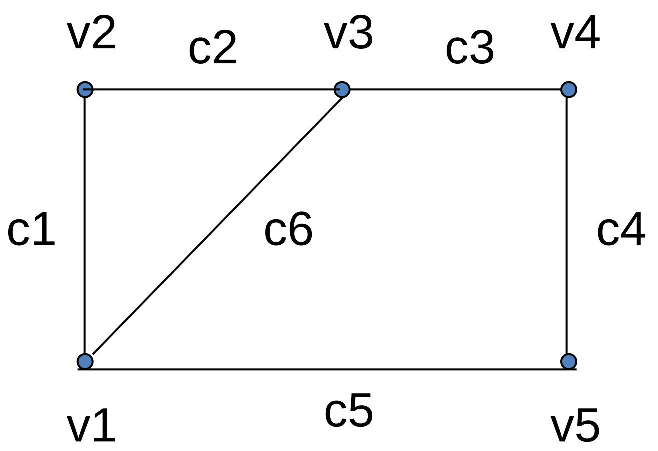
Grafos

IFRN

Prof.Robinson Alves

Caminhos

- É uma seqüência de arestas onde o vértice final de uma aresta é o vértice inicial da próxima



{c1,c2,c4,c5,c6} {c2,c3,c4,c5}

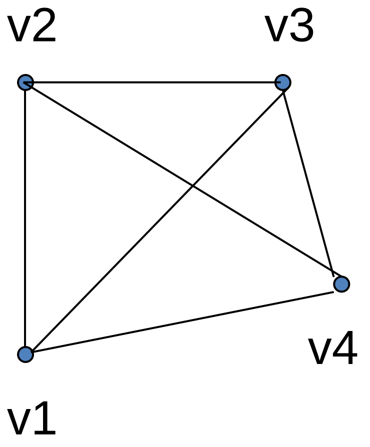
{v1,v2,v3,v4,v5} {v2,v3,v1,v5,v4}

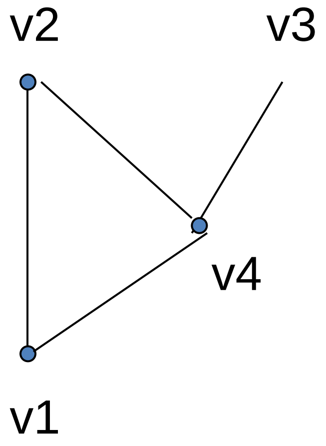
Caminhos

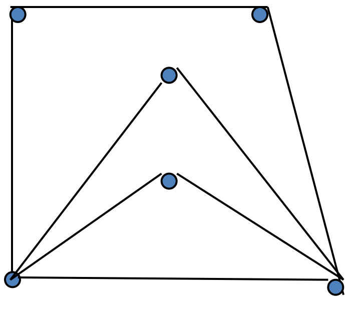
- Um caminho de k vértices tem (k-1) arestas, v1v2,v2v3,...,vk-1,vk e o comprimento do caminho é (k-1)
  - Caminho aberto(simples ou elementar): Todo os vértices são distintos. Ex.:{c2,c3,c4}
  - Caminho fechado ou ciclo ou circuitos: é aquele em que o vértice inicial é igual ao final e os vértices são distintos, ou seja: v1,v2,...,vk,vk+1, onde vk+1=v1. Ex {c1,c2,c3,c4,c5} não é um caminho aberto

Caminhos

- Grafos Eulerianos (grafos de Euler)
  - São grafos onde é possível achar um caminho fechado (ciclo), passando em cada aresta uma única vez
  - Quais são os grafos de Euler?

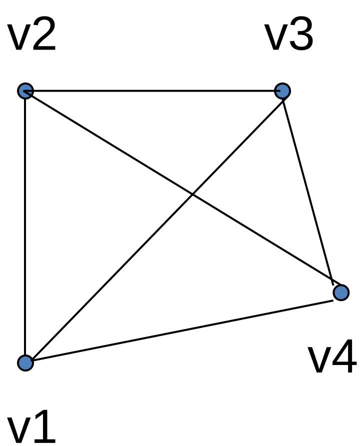


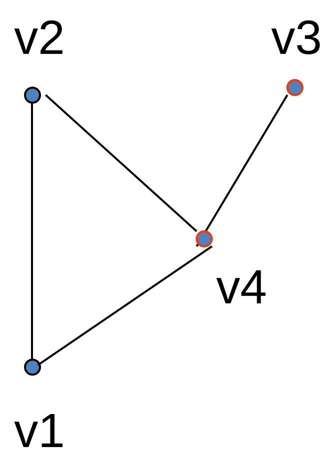


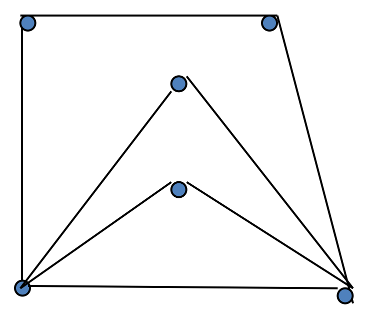


Caminhos

- Grafos Eulerianos (grafos de Euler)
  - Teorema: um grafo conexo G é um grafo de Euler se e somente se todos os seus vértices são grau par.

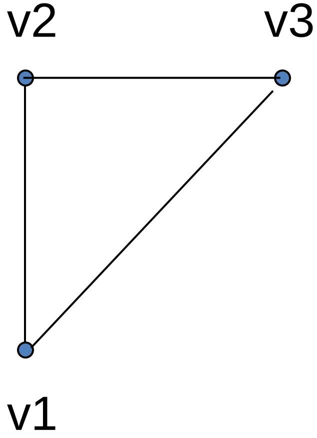


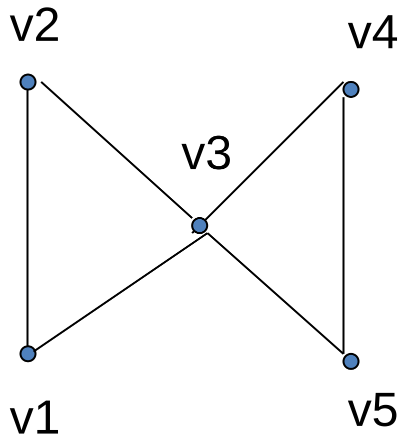




Caminhos

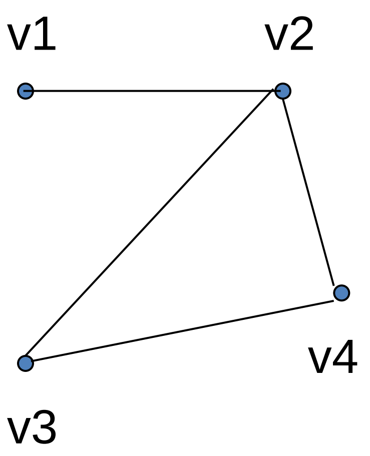
- Caminhos Eulerianos
  - São caminhos que passam por cada aresta um vez, passando por todas
  - Teorema: baseado no grau dos vértices do grafo: existe um caminho Euleriano em um grafo se:
    - Não ocorrer vértices de grau ímpar (inicia e termina no mesmo vértice)





Caminhos

- Caminhos Eulerianos
  - Teorema: baseado no grau dos vértices do grafo:existe um caminho Euleriano em um grafo se:
    - Existem 2 vértices de grau ímpar (inicia em um vértice ímpar e termina em outro vértice ímpar)

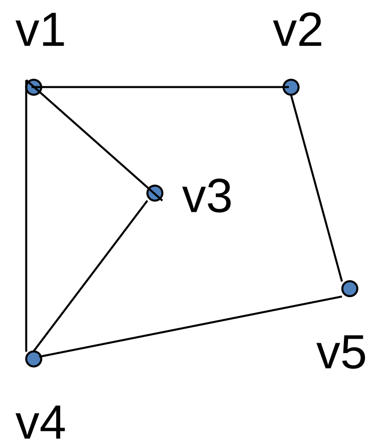


Grafo semi-euleriano

Caminhos

- Algoritmo para verificar a existência de um caminho euleriano

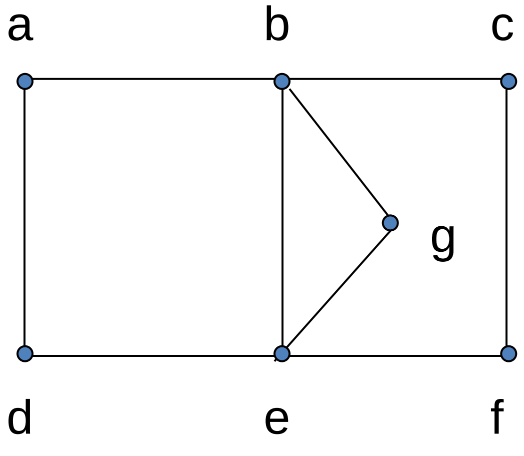
```
grau=0;   soma=0;   matadj[][];   N=numero de linhas da matriz;   f=0;//linha atual;
Enquanto(soma<=2)e(f<=N) {
          grau=0;
          para(g=0;g<N;g++){
                    grau+=matadj[f][g];
          }
          se grau mod 2 == 1  // ímpar
                    soma++
          f++;
}
Se (soma>2)         NÃO EXISTE CAMINHO
Senao               EXISTE CAMINHO
```



	1	2	3	4	5	*grau*
1	0	1	0	1	0	
2	1	0	0	1	1	
3	1	0	0	1	0	
4	0	1	1	0	1	
5	0	1	0	1	0	

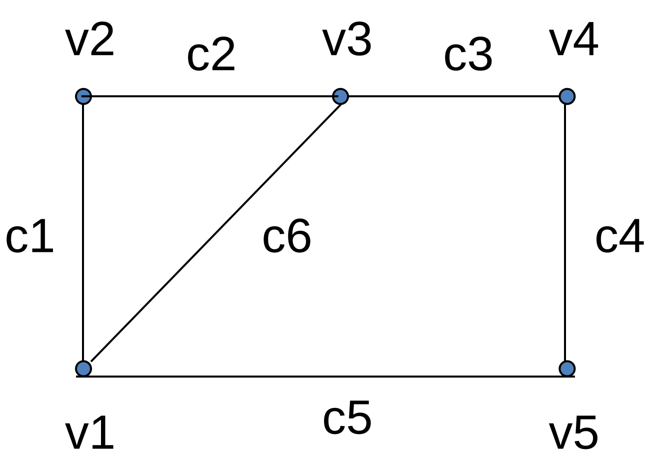
Caminhos

- Método de Fleury para traçar um ciclo euleriano
  - Inicie em qualquer vértice v e atravesse as arestas de uma maneira arbitrária, seguindo as seguintes regras
  - R1) apague a aresta que foi visitada e se algum vértice ficar isolado, apague-o também.
  - R2) em cada estágio, nunca atravesse uma aresta, se naquele momento a sua remoção divide o grafo em duas ou mais componentes não triviais (excluindo os vértices isolados).



Caminhos

- Ciclos e Caminhos Hamiltonianos
  - Um ciclo hamiltoniano em um grafo conexo G é definido com um caminho simples fechado em que cada vértice de G é visitado uma única vez (com exceção do nó inicial == final)
  - Um ciclo hamiltoniano em um grafo de n vértices tem n arestas

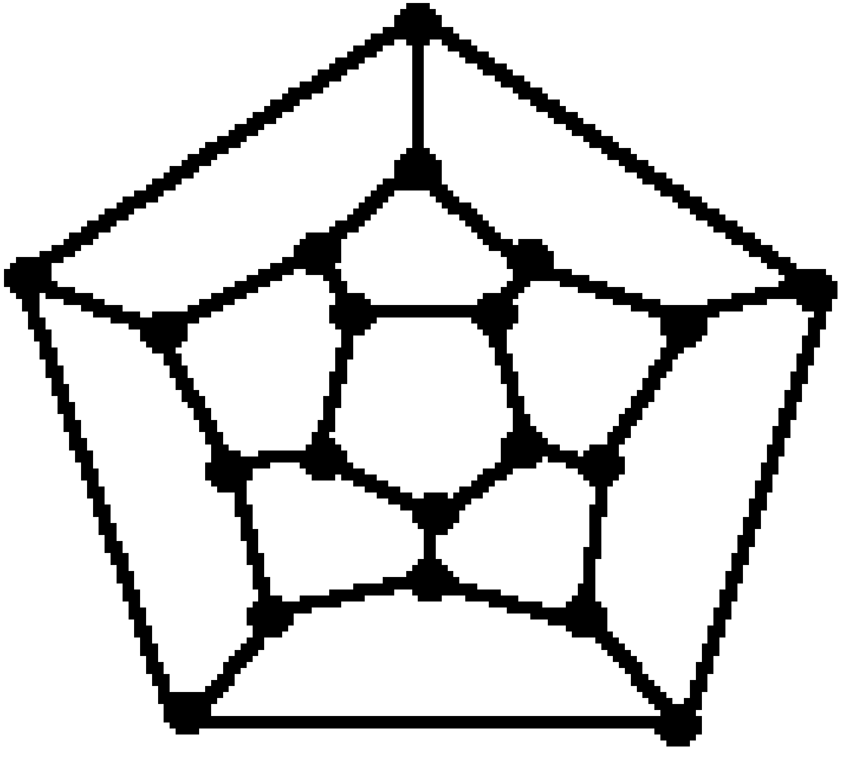


-Não é um grafo de euler

-Possui ciclo hamiltoniano?

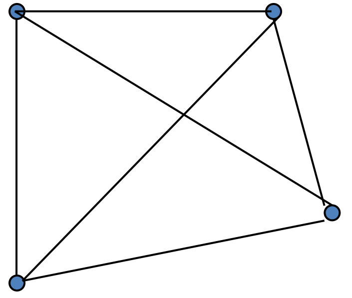
Caminhos

- Grafos Hamiltonianos: são grafos que admitem ciclos hamiltonianos.



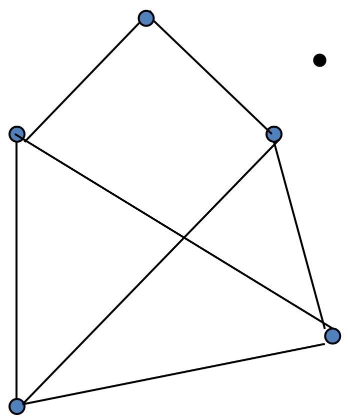
Caminhos

- Algumas condições para o grafo ser hamiltoniano.
  - **Condição de Dirac**
    - se G é um grafo simples com três ou mais vértices e e grau(v)>= n/2, então G é Hamiltoniano



Caminhos

- Algumas condições para o grafo ser hamiltoniano.
  - **Condição de Ore**
    - Se grau(u) + grau(v) >= n para TODO u,v **não adjacente**, então G é Hamiltoniano
      - **grau(v1)+grau((v3)>=5**
      - **grau(v2)+grau((v5)>=5**



Caminhos

- Condições para existência de um caminho Euleriano em um grafo
  - Grafo de euler ou semi-euler
- Condições para existência de um caminho Hamiltoniano em um grafo
  - Não tem ainda uma solução

Problema do Carteiro Chinês

- A primeira referência ao problema foi em 1962 em uma revista chinesa, tendo a designação ficada associada ao problema
- Pode ser formulado como o problema de encontrar um ciclo Euleriano de menor custo
  - Exemplo: Considere um bairro de uma cidade em que um carteiro é responsável por distribuir correspondências. Neste modelo as arestas ponderadas representaram as ruas e suas respectivas distâncias e os vértices os cruzamentos. Para que a correspondência seja entregue, é necessário que todas as ruas sejam percorridas pelo menos uma vez e que ao final o carteiro volte a estação do correio. O problema consiste em determinar o menor caminho possível para que o carteiro faça seu trabalho.
  - Problemas similares: recolhimento do lixo, inspeção de linhas de transmissão, inspeção de linhas telefônicas, etc.

Problema do Carteiro Chinês

- Encontrar o menor caminho(sendo de euler)
  - Problema do carteiro chinês: início ao fim passando em todas as arestas uma vez (menor caminho) – caminho de euler
    - Determinar o custo do menor caminho
    - Solução 1: se o grafo for euleriano, aplicar algoritmo de Fleury
    - Solução 2: se o grafo não for de euler aplicar o algoritmo de carteiro chinês (Christofides)

Algoritmo do carteiro chinês

P1: determinar os vértices de grau ímpar

P2: construa a matriz de distancia D, com os vértices de grau ímpar (Dijkstra)

P3: determinar o par de vértices c/ menor caminho através da matriz D

P4: construa um caminho artificial de vi para vj com custo encontrado em P3

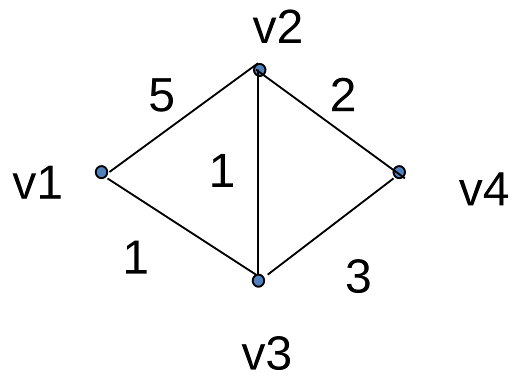
P5: elimine de D as colunas e linhas correspondentes vi e vj

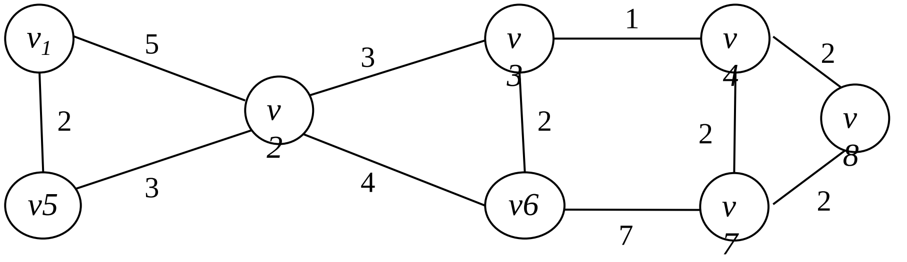
P6: se houver linhas e colunas em D, volte para P3

P7: ache o caminho de euler (fleury)

P8: o custo será igual à soma dos custos de todas as arestas acrescida dos custos das arestas encontradas em P3

Algoritmo do carteiro chinês





Problema do Menor Caminho

- Algoritmo Dijkstra
  - Edsger Dijkstra, ganhador do prêmio Turing em 1972
  - A idéia principal é o uso de um método guloso para o problema do caminho mínimo com origem única.
  - Funciona em grafo dirigido ou não dirigido com arestas de peso não negativo, em tempo computacional O([m+n]log n) onde m é o número de arestas e n é o número de vértices

Problema do Menor Caminho

- Algoritmo Dijkstra -determinar:
  - Seja G(V,A) e uma função L(V,W) pertencente aos reais e um vértice fixo V0 de V (fonte)
  - Problema: determinar v0,v1,...,vk, tal que $\sum_{i=0}^{k-1} l(v_i, v_{i+1})$ seja mínimo

$$L(v_i, v_j) = \begin{cases} \infty \; se\, não\; existir\;\; aresta(v_i, v_j) \\ 0 \quad v_i = v_j \\ custo\; se\, exitir\;\; aresta(v_i, v_j) \end{cases}$$

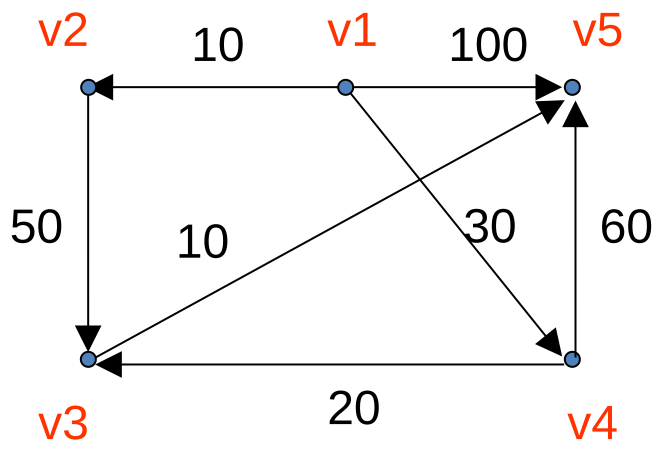
Problema do Menor Caminho Entre Dois Vértices

- Algoritmo Dijkstra -determinar:

```
S={v0};     D[v0]=0;
para cada v pertencente a V-{v0}
    D[v]=L(v0,V);
enquanto (s <> V){
    escolha o vértice w pertence V-S tal que D[w] seja mínimo
                 e congele o antecessor
    coloque w em S, isto é, faça S=S U {w}
    para cada v pertencente V-S faca{
          D[v]=min(D[v],d[w]+L(w,v))
          se(d[w]+L(w,v)<D[v])
                D[v].antecessor=w;
    }
}
```

Problema do Menor Caminho Entre Dois Vértices

- Ex Dijkstra

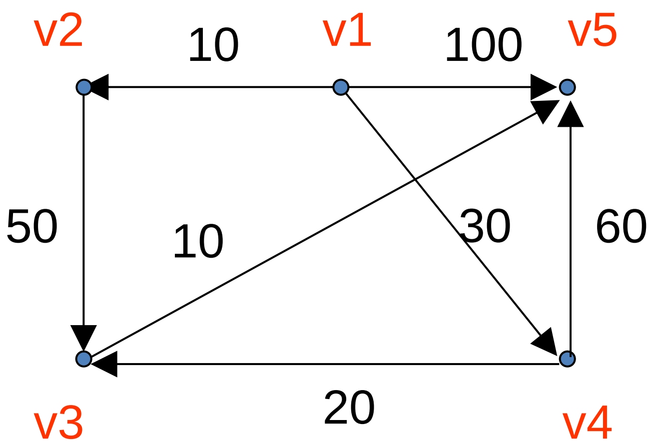


$$\begin{bmatrix} 0 & 10 & \infty & 30 & 100 \\ \infty & 0 & 50 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 10 \\ \infty & \infty & 20 & 0 & 60 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

Iteração	S	W	d(w)	d[2]	d[3]	d[4]	d[5]

Problema do Menor Caminho Entre Dois Vértices

- Ex Dijkstra

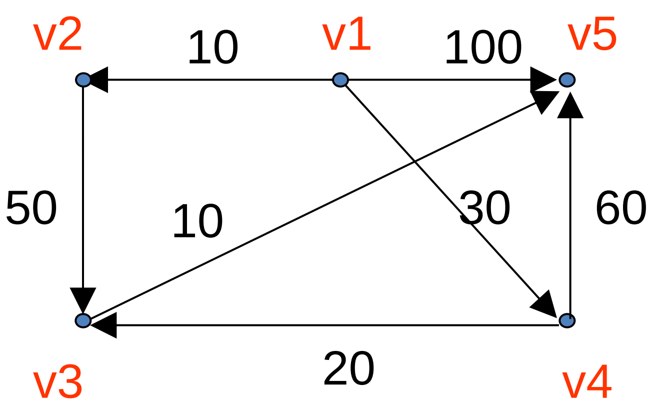


$$\begin{bmatrix} 0 & 10 & \infty & 30 & 100 \\ \infty & 0 & 50 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 10 \\ \infty & \infty & 20 & 0 & 60 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

Iteração	S	W	d(w)	d[2]	d[3]	d[4]	d[5]

Problema do Menor Caminho Entre Dois Vértices

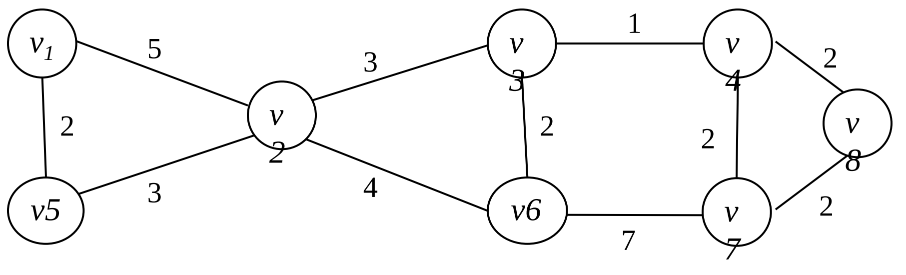
- Ex Dijkstra

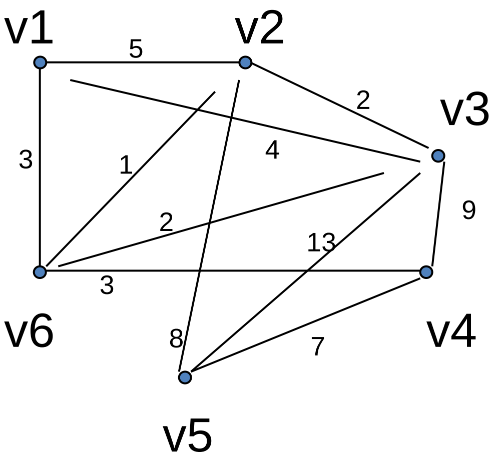


$$\begin{bmatrix} 0 & 10 & \infty & 30 & 100 \\ \infty & 0 & 50 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 10 \\ \infty & \infty & 20 & 0 & 60 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 \end{bmatrix}$$

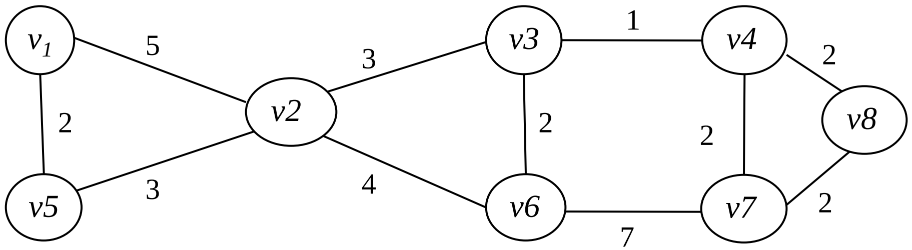
Iteração	S	W	d(w)	d[2]	d[3]	d[4]	d[5]
Inicio	v1	-	-	10(v1)	∞	30(v1)	100(v1)
1	V1,v2	v2	10	-	∞,10+50 **60(v2)**	30,10+∞ **30(v1)**	100,10+ ∞ **100(v1)**
2	V1,v2,v4	v4	30	-	60,30+20 **50(v4).**limp	-	100,30+60 **90(v4)**
3	V1,v2,v4,v3	v3	50	-	-	-	90,50+10 **60(v3)**
4	V1,v2,v4,v3,v5	v5	60	-	-	-	-

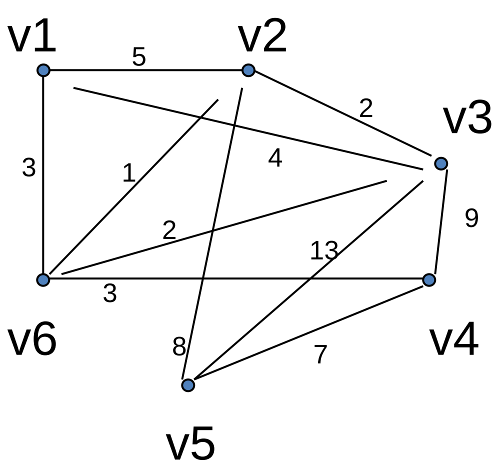
Exercícios: Encontre o menor caminho entre um vértice origem até todos os outros vértices. Use Algoritmo do Dijkstra





Exercícios: Encontre um ciclo Euleriano para os grafos abaixo. Use Algoritmo do carteiro chinês





Dúvidas