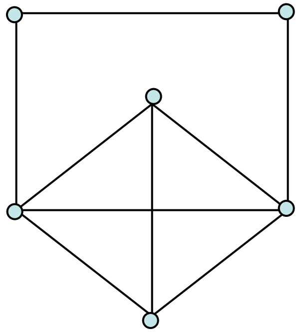
Problemas Algorítmicos

- Categorias de Problemas Algorítmicos
  - Problema de Decisão
  - Problema de Localização
  - Problema de Otimização

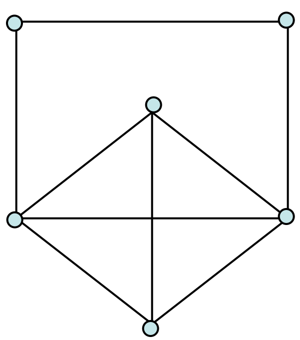
Problemas Algorítmicos

- Categorias de Problemas Algorítmicos
  - Problema de Decisão
    - Consiste em responder Sim ou Não à determinada pergunta
    - Ex.: No grafo abaixo existe uma clique >= 3?



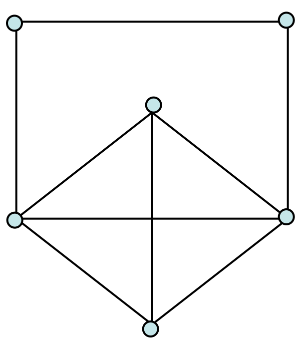
Problemas Algorítmicos

- Categorias de Problemas Algorítmicos
  - Problema de Localização
    - Consiste em encontrar, caso exista, determinada estrutura satisfazendo requisitos especificados por uma questão
    - Ex.: encontrar uma clique >= 3?



Problemas Algorítmicos

- Categorias de Problemas Algorítmicos
  - Problema de Otimização
    - Consiste em encontrar determinada estrutura satisfazendo um critério de otimização pré-definido
    - Ex.: encontrar uma clique de tamanho máximo no grafo abaixo



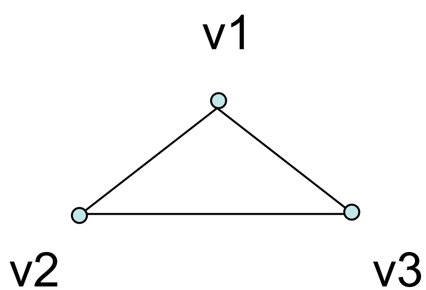
Conexidade e Distância

- Aplicações:
  - Telefonia
  - Tráfego
  - Redes de comunicação

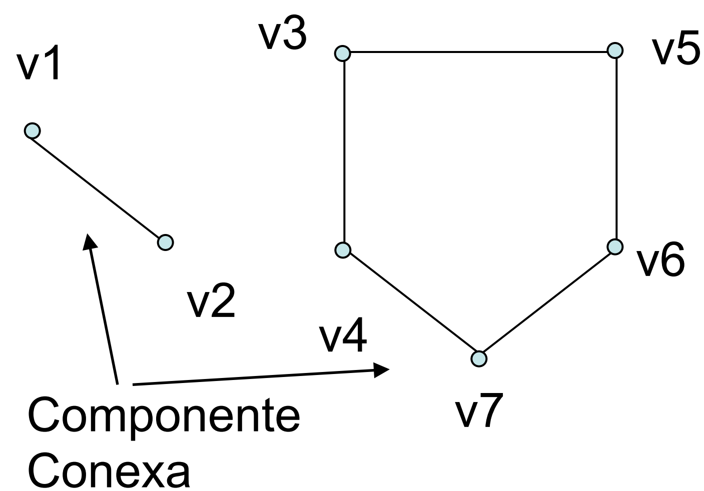
Conexidade e Distância

- Grafo Conexo
  - Um grafo G(V,A) é dito ser conexo ou simplesmente conexo ou S-Conexo. Se há pelo menos uma seqüência de arestas ligando cada par de vértices do grafo G.

Conexo



Não-Conexo

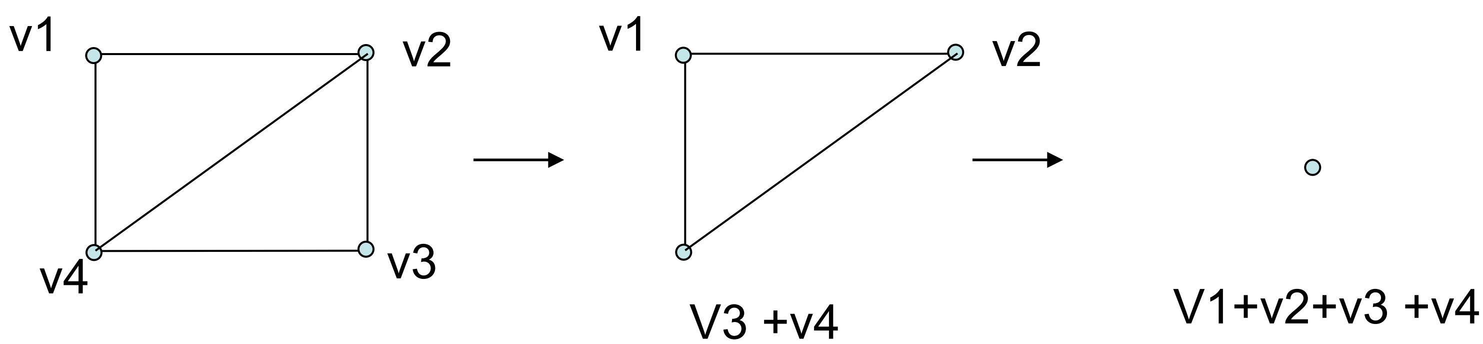


Conexidade e Distância

- Grafo Conexo
  - Um grafo não conexo consiste de dois ou mais subgrafos conexos (componentes)

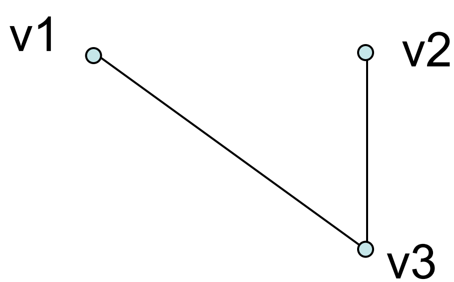
Conexidade e Distância

- Algoritmo para Conexidade
  - Reduzir cada componente do grafo a um único vértice. Processo de redução sequêncial onde todos os vértices adjacentes a um dado vértice são fundidos com ele



Conexidade e Distância

- Algoritmo para Conexidade
  - OBS.: qualquer grafo simples com n vértices e mais que (n-1)(n-2)/2 arestas é conexo



N=3
Num_arestas > (3-1)(3-2)/2=1

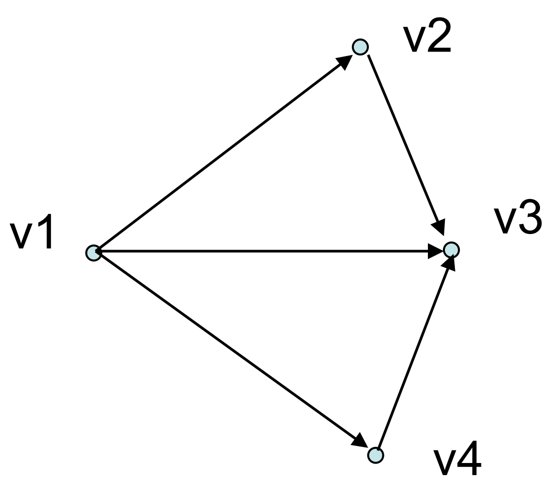
Conexidade e Distância

- Algoritmo para Conexidade de Goodman

```
P0 [inicialização]
H=Vg; // todos os vértices
c=0;
P1[gere a próxima componente conexa]
Enquanto (H!=vazio){
   selecione um vértice v0 pertencente a H
   Enquanto (v0 for adjacente a algum vértice v pertencente a H){
     H=grafo resultante da fusão de v com v0;
   }
   remova v0, isto é, faça     H=H-v0;
                               c=c+1;
}
P2[Testa o tipo de conexidade]
Se(c>1)
   G é não conexo
senao
   G é conexo
```

Conexidade e Distância

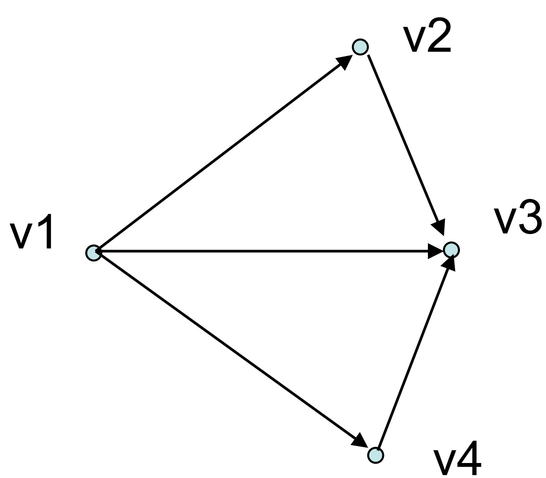
- Antecessor de um vértice
  - É todo Vj que seja extremidade inicial de uma aresta que termina em Vi. Sua notação é $\Gamma^{-}(v_i)$



Antecessores de v3=
{v1,v2,v4}

Conexidade e Distância

- Sucessor de um vértice
  - É todo Vj que seja extremidade final de uma aresta que termina em Vi. Sua notação é $\Gamma^{+}(v_i)$



Sucessores de v1= {v2,v3,v4}

Conexidade e Distância

- Fechos Transitivos Diretos
  - Um fecho transitivo direto de um vértice Vi é o conjunto de todos os vértices que podem ser atingidos a partir de Vi, em um número qualquer de etapas. Sua notação é $\hat{\Gamma}^{+}(v_i)$

$$\hat{\Gamma}^{+}(v_i) = \{v_i\} \cup \left[\bigcup_{k=1}^{n} \hat{\Gamma}^{+k}(v_i)\right]$$

$$\Gamma^{+}(v_i) = \Gamma^{+}(v_i)$$

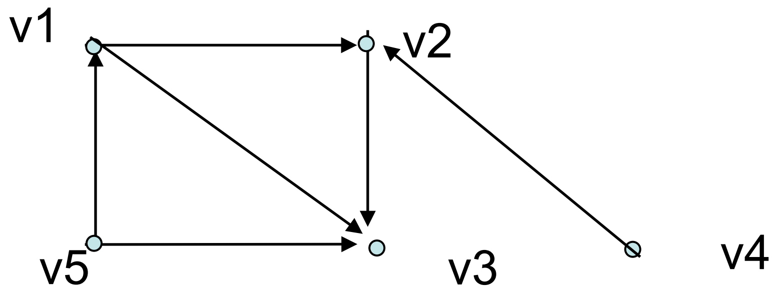
$$\Gamma^{+2}(v_i) = \Gamma^{+}(\Gamma^{+}(v_i))$$

$$\ldots$$

$$\Gamma^{+n}(v_i) = \Gamma^{+}(\Gamma^{+(n-1)}(v_i))$$

Conexidade e Distância

- Fechos Transitivos Diretos



$$\hat{\Gamma}^{+}(v_1) = \{v_1, v_2, v_3\}$$

$$\hat{\Gamma}^{+}(v_5) = \{v_5, v_1, v_3, v_2\}$$

Conexidade e Distância

- Fechos Transitivos Inverso
  - Um fecho transitivo inverso de um vértice Vi é o conjunto de todos os vértices que podem atingir Vi, em um número qualquer de etapas. Sua notação é

$$\hat{\Gamma}^{-}(v_i) = \{v_i\} \cup \left[\bigcup_{k=1}^{n} \Gamma^{-k}(v_i) \right]$$

$$\Gamma^{-}(v_i) = \Gamma^{-}(v_i)$$

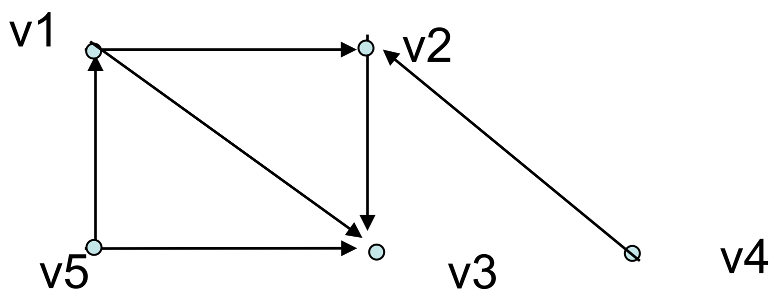
$$\Gamma^{-2}(v_i) = \Gamma^{-}(\Gamma^{-}(v_i))$$

$$\ldots$$

$$\Gamma^{-n}(v_i) = \Gamma^{-}(\Gamma^{-(n-1)}(v_i))$$

Conexidade e Distância

- Fechos Transitivos Inverso

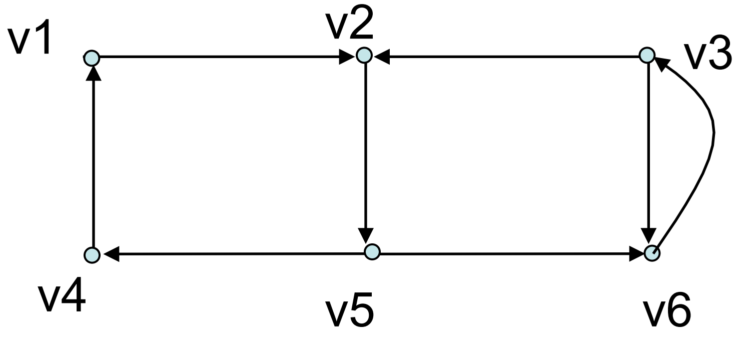


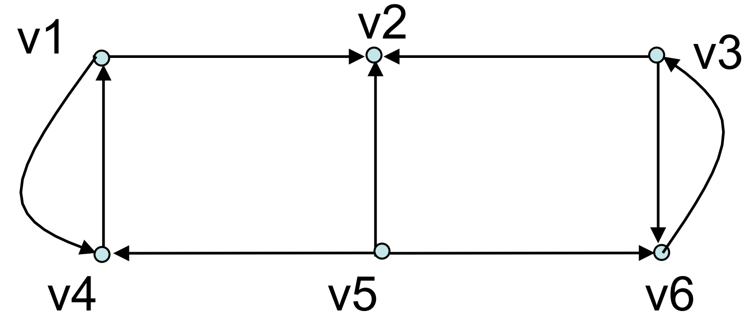
$$\hat{\Gamma}^{-}(v_1) = \{v_5, v_1\}$$

$$\hat{\Gamma}^{-}(v_5) = \{v_5\}$$

Conexidade e Distância

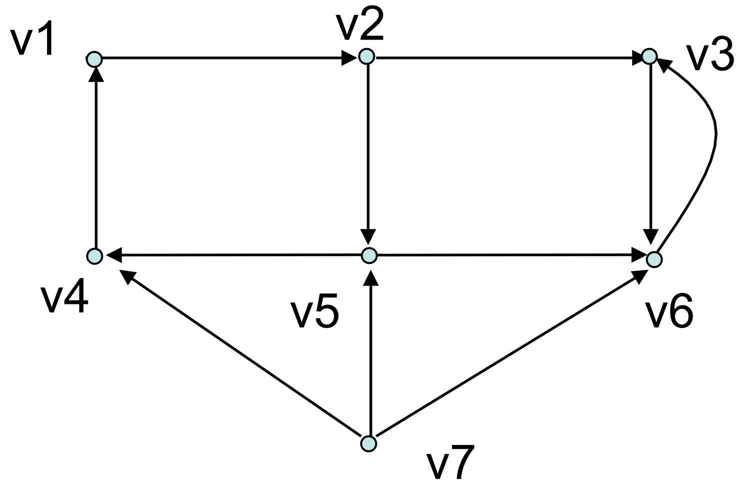
- Grafo Fortemente Conexo
  - No caso de grafos orientados, um grafo é dito ser fortemente conexo (F_Conexo) se todo par de vértices ou seja, se cada par de vértices participa de um circuito. Isto significa que cada vértice pode ser alcançável partindo-se de qualquer outro vértice de grafo.





Conexidade e Distância

- Componente Fortemente Conexa
  - Um grafo G(V,A) que não é fortemente conexo é formado por pelo menos dois subgrafos F_Conexos (fortemente conexo). Cada um desses grafos é dito ser uma componente fortemente conexa de G.



Conexidade e Distância

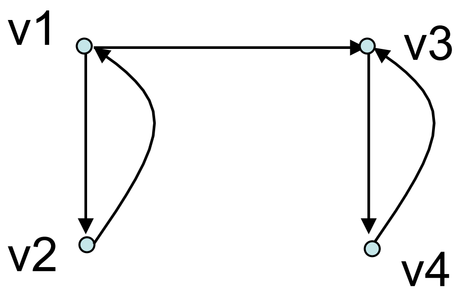
- Método para achar as componentes F-Conexas de um Grafo

```
H = V;
Enquanto(H!=vazio){
  Ache a componente conexa em relação a Vi
```

$$y(v_i) = \hat{\Gamma}^{+}(v_i) \bigcap \hat{\Gamma}^{-}(v_i)$$

$$H = H - y(v_i)$$

```
}
```



Conexidade e Distância

- Método para achar as componentes F-Conexas de um Grafo usando a matriz R e Q

Matriz $R = \lfloor \Gamma_{ij} \rfloor$

$$\Gamma_{ij} = \begin{cases} 1, se\ o\ vértice\ v_j\ \ pode\ ser\ atingido\ \ partindo\ no\ vértice\ v_i \\ 0, caso\ contrário \end{cases}$$

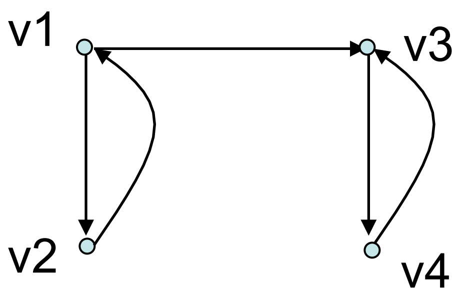
$$Q = R^t$$

Para se encontrar as componentes fortemente conexas faz-se

$$R \otimes Q$$

Conexidade e Distância

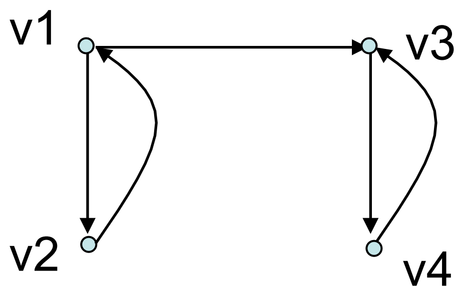
- Ex.:

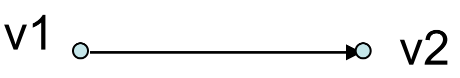


$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad R \otimes Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Conexidade e Distância

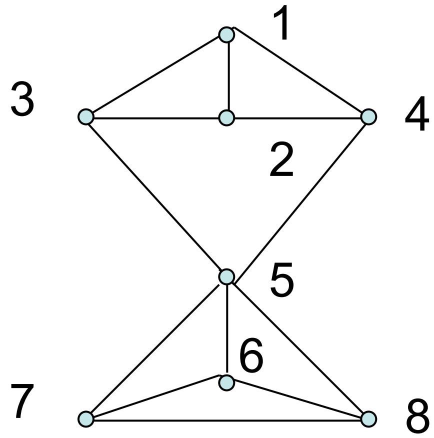
- Grafo Reduzido
  - Cada vértice corresponde a uma componente fortemente conexa do grafo. Sua notação é $G^*(V^*, A^*)$





Conexidade e Distância

- Vértice de Corte
  - Um vértice é dito ser um vértice de corte se sua remoção(juntamente com as arestas a ele conectadas) provoca uma redução na conexidade do grafo

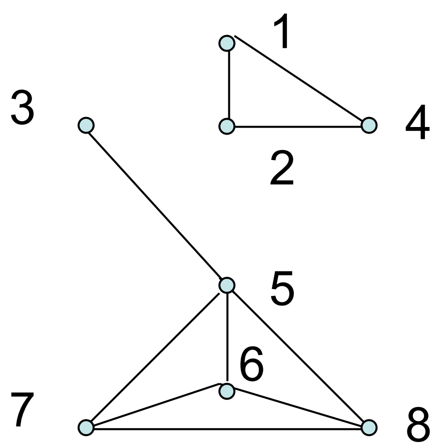


Ex.: {3,4}
{5} -> vértice de corte de cardinalidade mínima

  - A conectividade do grafo é 1(pois removendo 5 desconectamos o grafo)

Conexidade e Distância

- Arestas de Corte
  - Uma aresta é dita ser uma aresta de corte se sua remoção provoca uma redução na conexidade do grafo

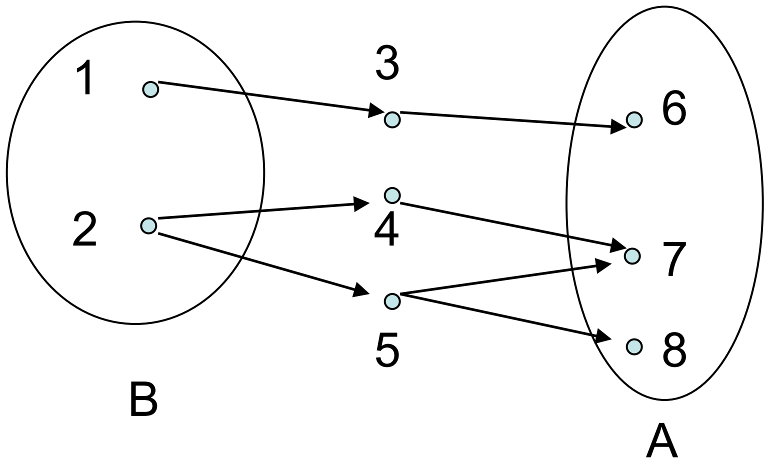


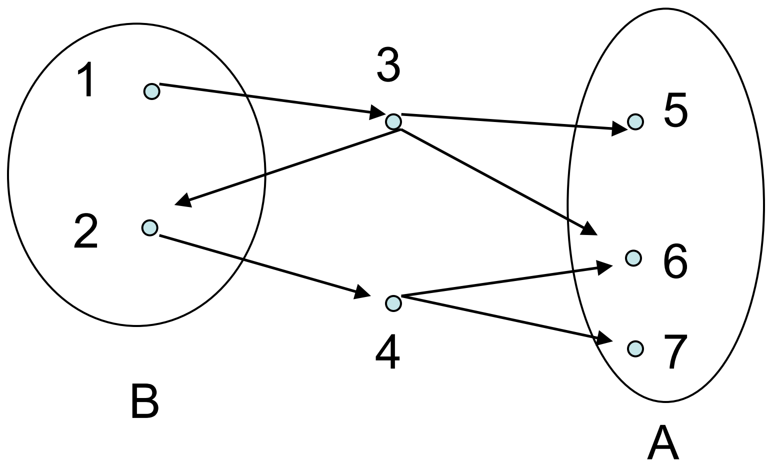
Ex.: {(1,3),(2,3),(4,5)}
{(3,5,(4,5)} -> arestas de corte de cardinalidade mínima

  - A conectividade de arestas do grafo é 2(pois removendo (3,5) e (4,5) desconectamos o grafo)

Conexidade e Distância

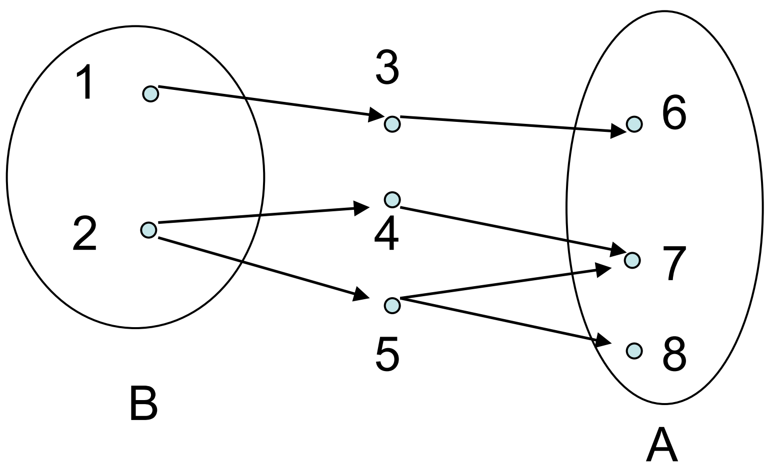
- Base
  - Uma base de um grafo G(V,A) é um subconjunto $B \subset V$, tal que:
    - Dois vértices quaisquer de B não são ligados por nenhum caminho
    - Todo vértice não pertencente a B pode ser atingido por um caminho partindo de B

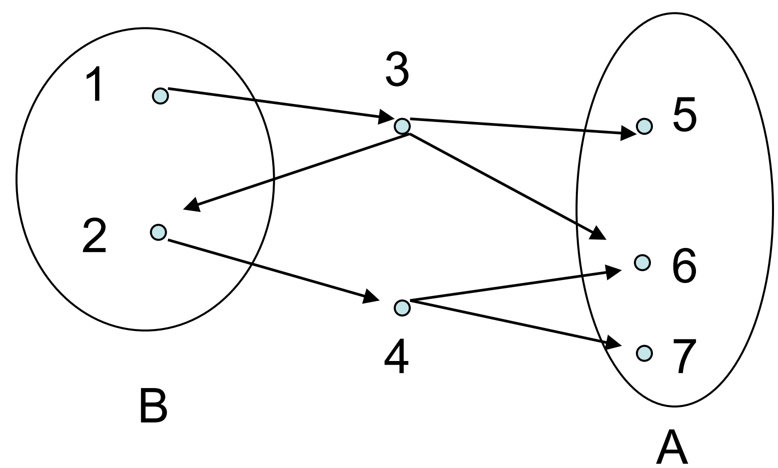




Conexidade e Distância

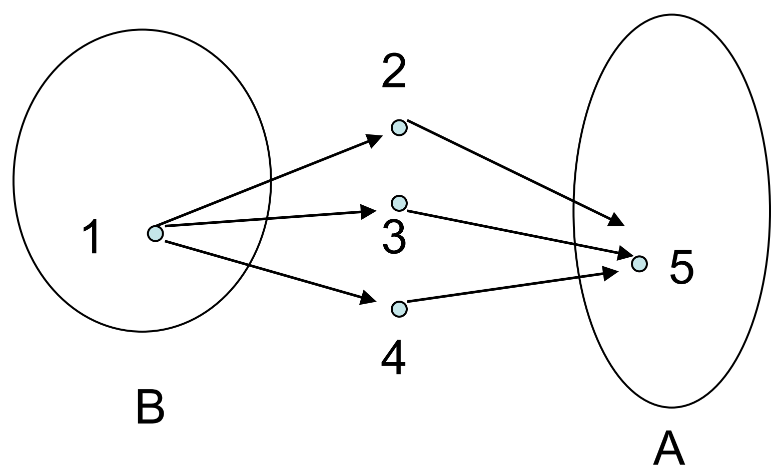
- Anti-Base
  - Uma anti-base de um grafo G(V,A) é um subconjunto $B \subset V$, tal que:
    - Dois vértices quaisquer de A não são ligados por nenhum caminho
    - Todo vértice não pertencente a A pode atingir A por um caminho





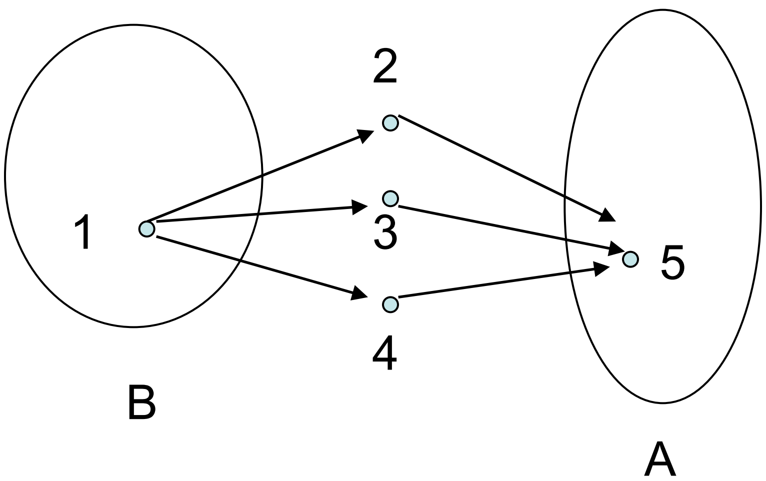
Conexidade e Distância

- Raiz
  - Se a base de um grafo G(V,A) é um conjunto unitário então esta base é a raiz de G



Conexidade e Distância

- Anti-Raiz
  - Se a anti-base de um grafo G(V,A) é um conjunto unitário então esta anti-base é a anti-raiz de G



Conexidade e Distância

- Distância
  - Dado dois vértices v e w pertencentes ao grafo G(V,E), denomina-se distância entre v e w o comprimento do menor caminho entre esses dois vértices. Se não houver caminho, a distância é infinita
  - Notação d(v,w)
  - Propriedades:
    - d(w,v)>=0 ou d(w,v)=0 p/ w=v
    - d(w,v)=d(v,w) apenas p/ grafos não direcionados
    - d(z,v) + d(v,w) >= d(z,w)

Conexidade e Distância

- Distância

  d(1,8)? d(1,4)? d(1,3)?