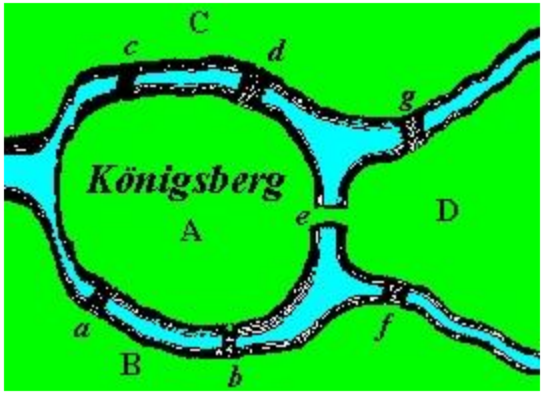
Grafos

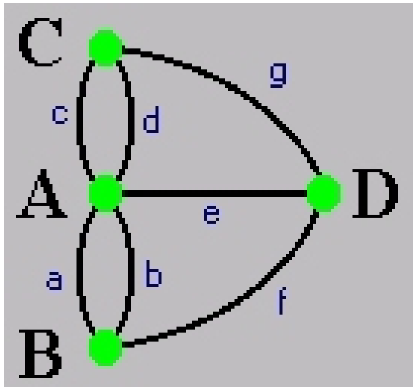
IFRN

Robinson Alves

Introdução

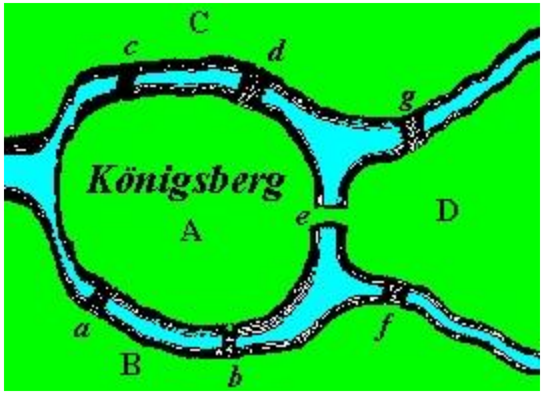
- Problema das Pontes de Königsberg
  - No século 18 havia na cidade de Königsberg(antiga Prússia) um conjunto de sete pontes (identificadas pelas letras de **a** até **f** nas figuras abaixo) que cruzavam o rio Pregel. Elas conectavam duas ilhas entre si e as ilhas com as margens Por muito tempo os habitantes daquela cidade perguntavam-se se era possível cruzar as sete pontes numa caminhada contínua sem passar duas vezes por qualquer uma delas.

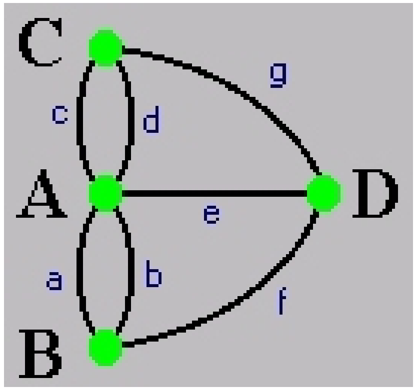




Introdução

- Problema das Pontes de Königsberg
  - Então em 1736, Euler apresentou na Academia de São Petersburgo um trabalho em que ele resolvia a questão se era ou não possível existir uma rota para um transeunte atravessar as sete pontes sobre o rio Pregel, em Königsberg, de tal modo que cada ponte era utilizada apenas uma vez.
  - O artigo de Euler sobre o problema das 7 pontes e generalização desse problema, publicado em 1736 é considerado o primeiro artigo sobre teoria dos grafos. O termo grafo não é usado nesse artigo (em latim).



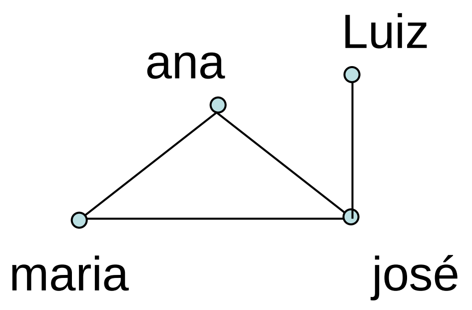


Conceitos Básicos

- Definição: um grafo G(V,A) é definido pelo par de conjuntos V e A, onde:
  - V= conjunto não vazio: os vértices ou nodos ou nós do grafo
  - A= conjunto de pares ordenados a=(V,W), V e W pertence a V: as arestas ou linhas ou arcos ou ramos do grafo

Conceitos Básicos

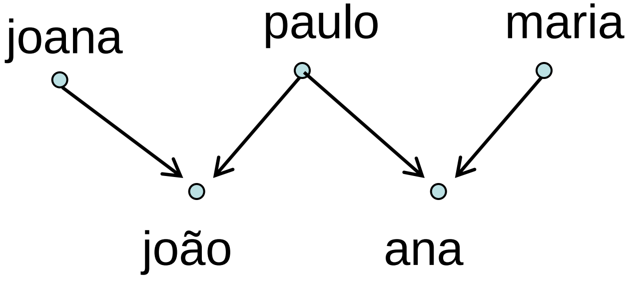
- Exemplo de grafo:
  - V={p|p é uma pessoa}
  - A{(v,w)| v é amiga de w}



V={maria, josé, ana, luiz}
A{(maria,josé), (maria,ana), (josé,luiz), (josé,ana)}

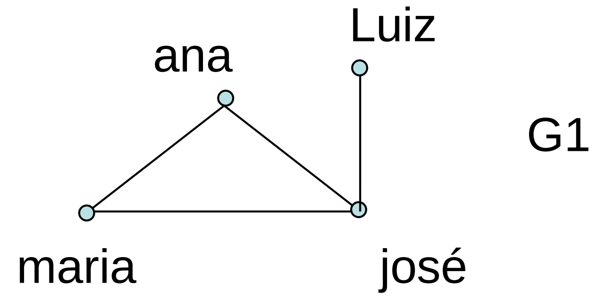
Conceitos Básicos

- Dígrafo
  - É um grafo orientado
    - V={p|p é uma pessoa}
    - A{(v,w)| v é pai/mãe de w}



Conceitos Básicos

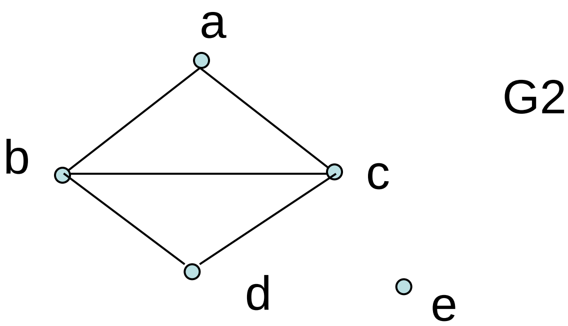
- Ordem
  - É o número de nós de G
    - Ordem(G1)=4

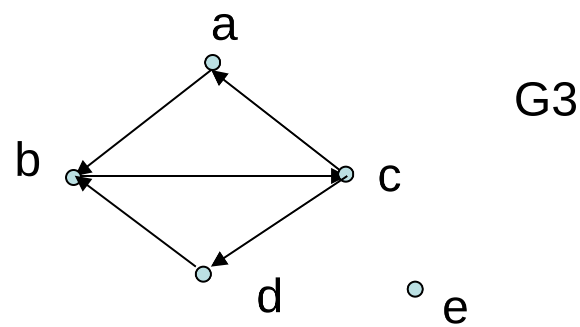


  - Adjacência
    - Dois vértices v e w de um grafo são adjacentes se há uma aresta a(v,w) em G
      - Ex. josé e Luiz em G1
    - O mesmo ocorre com duas arestas que incidem sobre o mesmo vértice

Conceitos Básicos

- Grau de um nó
  - É o número de arestas incidentes
    - grau(b)=3

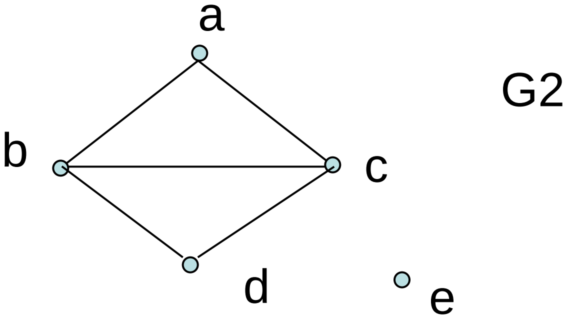




    - O grau de saída (*outdegree*) de um vértice v num dígrafo é o número de arcos que têm ponta inicial no vértice v. O grau de entrada (*indegree*) de um vértice w num dígrafo é o número de arcos que têm ponta final no vértice w

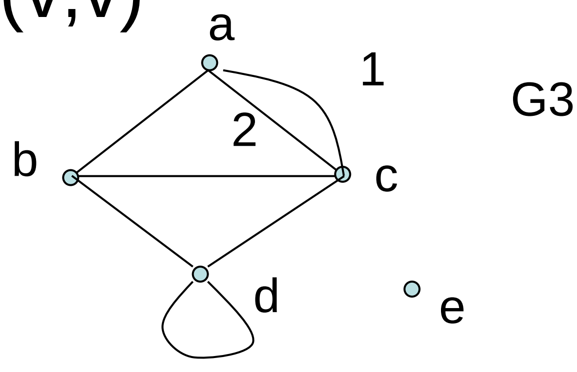
Conceitos Básicos

- Grau de um nó
  - Nó isolado
    - É aquele que possui grau igual a zero
      - Ex.: vértice e



Conceitos Básicos

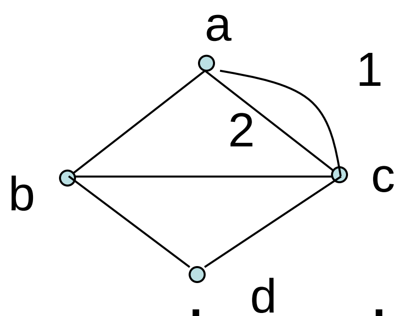
- Laço
  - – É uma aresta do tipo a=(v,v)



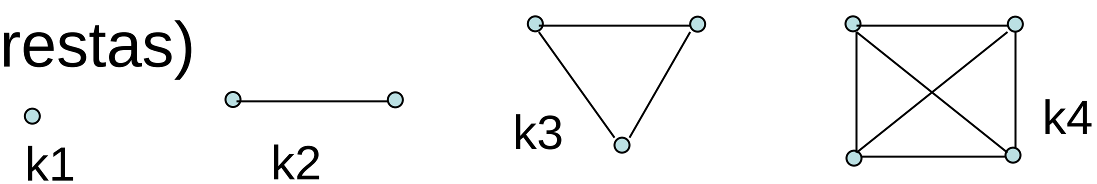
- Arestas paralelas
  - São arestas ci=(v,w) e cj=(v,w)

Conceitos Básicos

- Multigrafo
  - É o grafo que possui <u>laços</u> e/ou arestas paralelas caso contrário é dito grafo simples

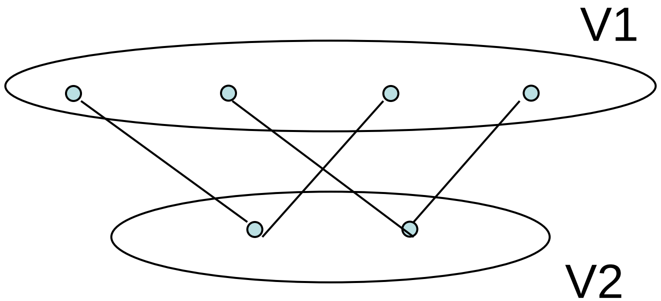


- Grafo completo
  - Um grafo é dito completo quando cada par distinto de vértice é adjacente
    - Kn=grafo completo de ordem n (possui $m = \left(\frac{n!}{(n-2)!2!} \right)$ arestas)



Conceitos Básicos

- Grafo bipartido
  - Um grafo é considerado bipartido quando seu conjunto de vértices V puder ser particionado em dois subgrafos V1 e V2, tal que toda aresta de G une um vértice de v1 a outro de v2



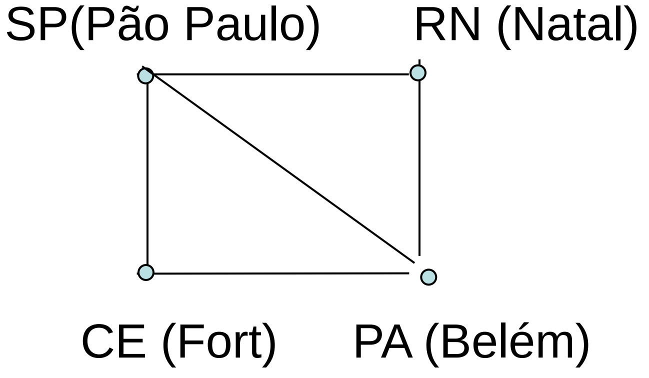
$$V = V1 \bigcup V2$$

$$V1 \bigcap V2 = \phi$$

  - Se o grafo for bipartido- completo todo vértice de V1 tem uma aresta para V2

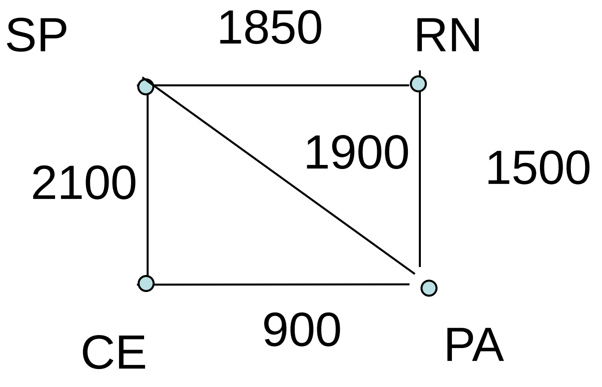
Conceitos Básicos

- Grafo rotulado
  – Em um grafo rotulado, cada vértice está associado a um rótulo



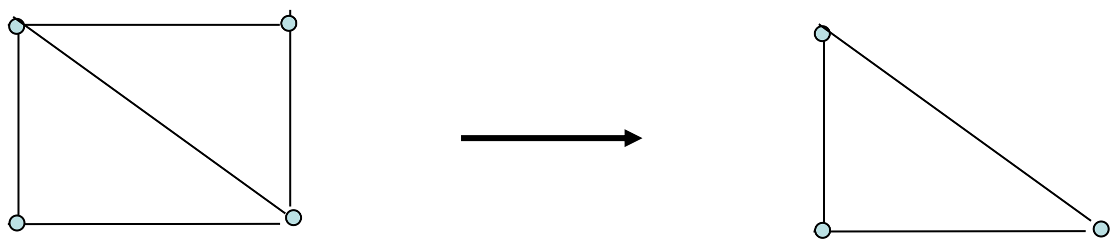
Conceitos Básicos

- Grafo valorado
  - Um grafo F(V,A) é dito ser valorado quando existe uma ou mais funções relacionando V e/ou A com um conjunto de números



Conceitos Básicos

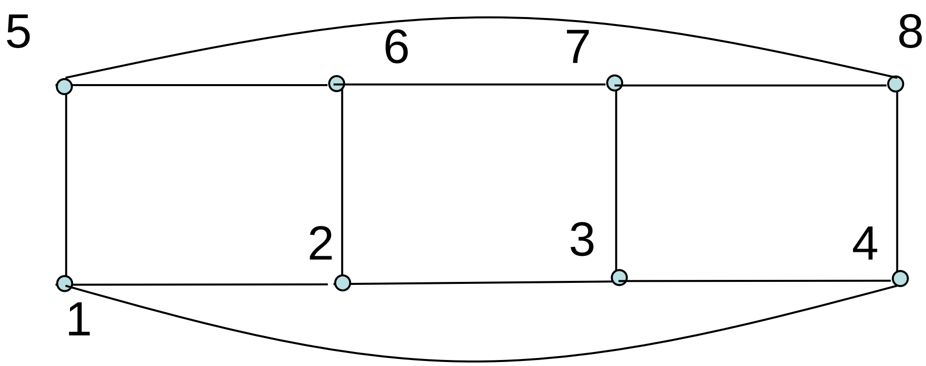
- Subgrafo
  - Um grafo Gs(Vs,As) é dito ser subgrafo de G(V,A) se Vs está contido em V e se As está contido em A

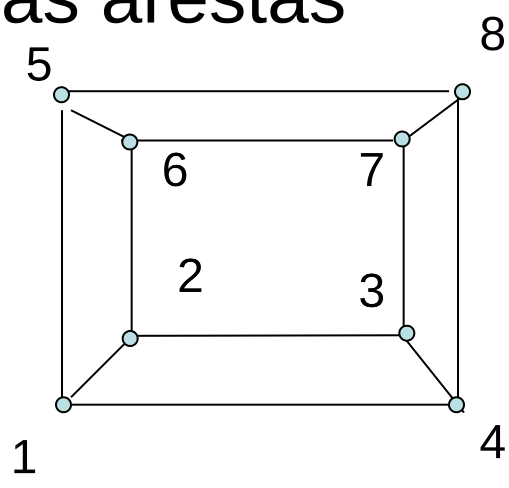


  - Um subgrafo é obtido através de supressão de vértices

Conceitos Básicos

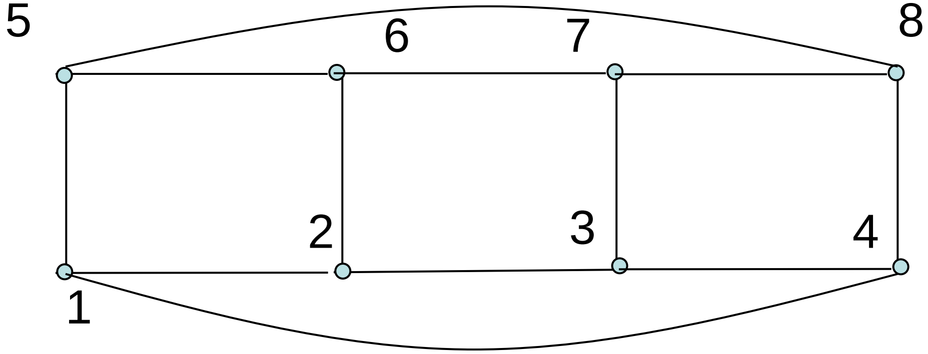
- Grafos Isomorfos
  - Dois grafos são isomorfos se for possível fazer coincidir, respectivamente, os vértices de suas representações gráficas, preservando as adjacências das arestas





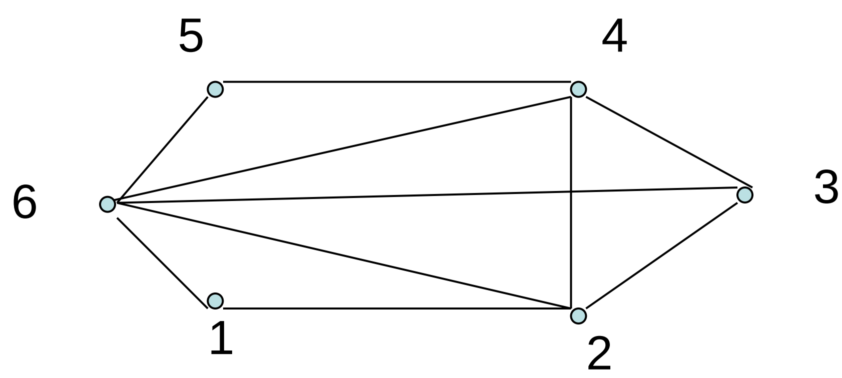
Conceitos Básicos

- Grafo regular
  - Ocorre quando todos os seus vértices possuírem o mesmo grau R



Conceitos Básicos

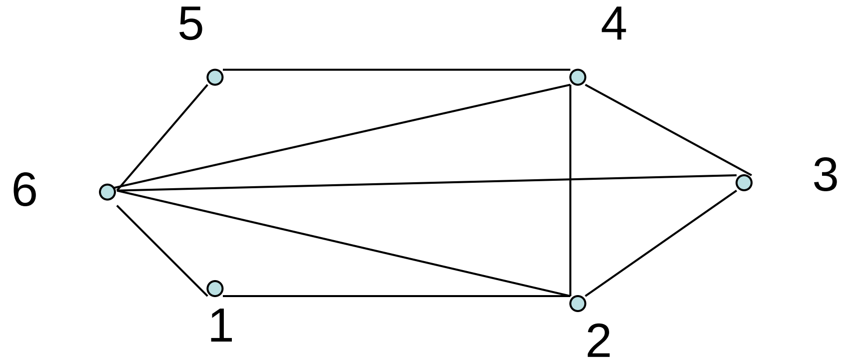
- Clique em um grafo
  - Denomina-se clique de um grafo G um subgrafo de G que seja completo. É denotado como Kn, onde n é o número de vértices do clique



  - Subgrafo {2,3,4,6} é um clique de tamanho 4 (K4)

Conceitos Básicos

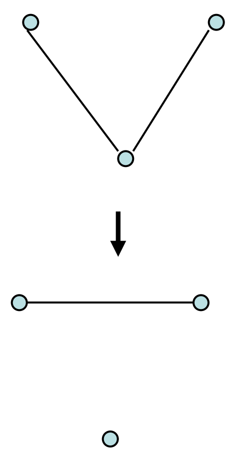
- Conjunto independente de vértices
  - Denomina-se conjunto independente de vértices de um grafo G um conjunto de vértices que não há arestas entre eles.

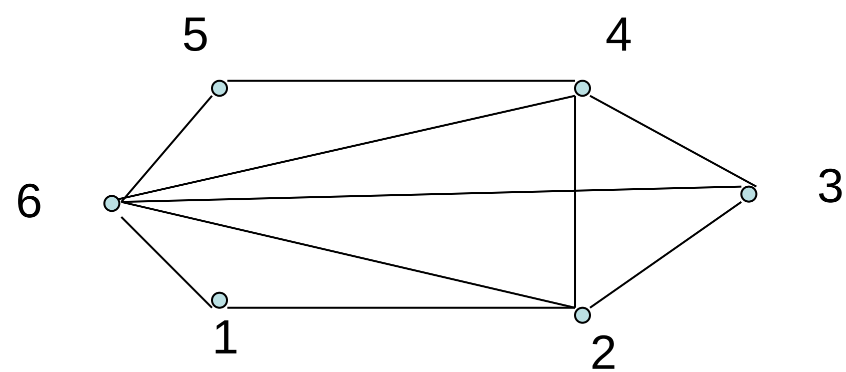


  - {1,3,5} é um conjunto independente de vértices

Conceitos Básicos

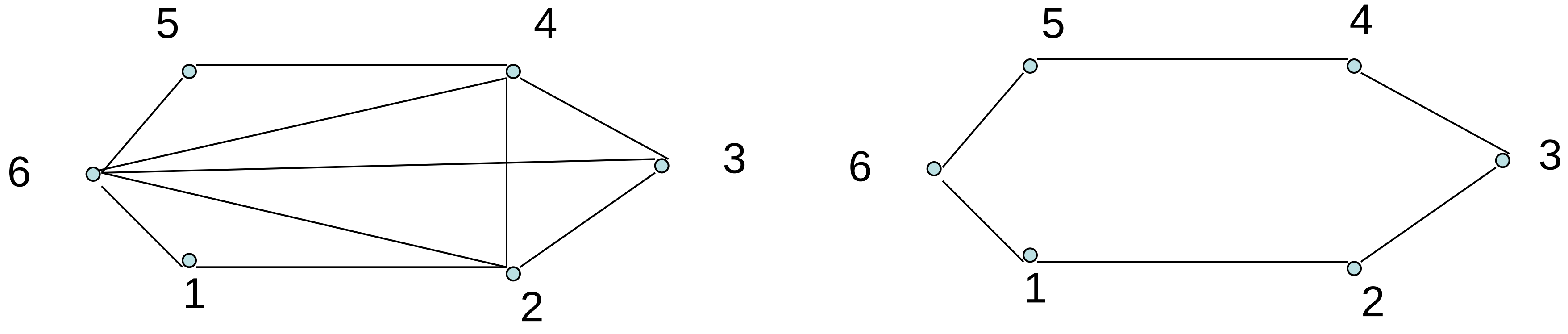
- Grafo complementar
  - Um grafo $\bar{G}$ é dito complementar de G se possuir a mesma ordem de G e se uma aresta (vi,vj) pertence a G, então a mesma aresta não pertence ao seu complementar





Conceitos Básicos

- Grafo parcial
  - Um grafo Gp(Vp,Ap) é dito ser parcial de G(V,A) se Vp=V e Ap está contido em A



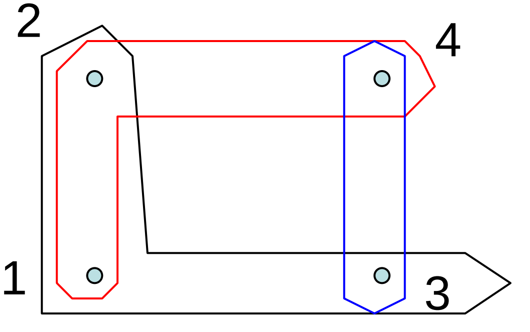
Um grafo parcial é obtido através da supressão de arestas

Conceitos Básicos

- Hipergrafo
  - O conceito de grafo pode ser generalizado para o caso em que a relação entre os vértices não é constituída com apenas um par de vértices. Os hipergrafos são modelos que permitem a representação de arestas que englobam mais de dois nós.
  - Definição:
    - Um hipergrafo H(V,E) é definido pelo par de conjunto V e E, onde:
      - V – conjunto não vazio de vértices.
      - E – é uma família de partes de V não vazias.

Conceitos Básicos

- Hipergrafo
  - V={1,2,3,4}
  - E={{1,2,4},{1,2,3},{3,4}}



Conceitos Básicos

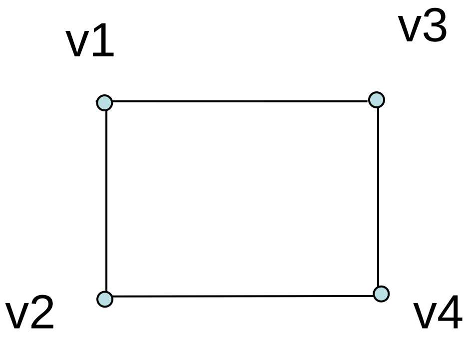
- Representação de grafos
  - A forma mais comum de representar um grafo é através do desenho de pontos e linhas. Em um computador, o TAD Grafo pode ser representado de diversas maneiras:
    - Matriz de adjacência
    - Matriz de custos
    - Matriz de incidência
    - Lista de adjacência
    - Lista de arestas

Conceitos Básicos

- Representação de grafos
  - Matriz de adjacência
    - Dado um grafo G(V,A), a matriz de adjacência $M=[a_{ij}]$ é uma matriz n x m tal que
    - aij=
      - +1 se existe (Vi,Vj) pertencente a A.
      - 0 caso contrário.

Conceitos Básicos

- Representação de grafos
  - Matriz de adjacência
    - aij=
      - +1 se existe (Vi,Vj) pertencente a A.
      - 0 caso contrário.

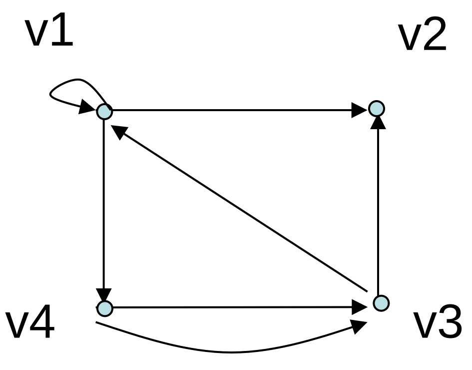


M=

	v1	v2	v3	v4
v1	0	1	1	0
V2	1	0	0	1
v3	1	0	0	1
V4	0	1	1	0

Conceitos Básicos

- Representação de grafos
  - Matriz de adjacência
    - aij=
      - +1 se existe (Vi,Vj) pertencente a A.
      - 0 caso contrário.



M=

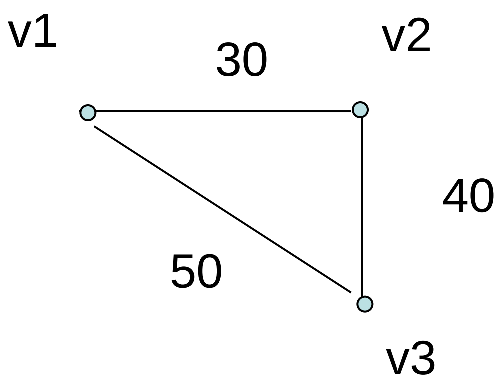
	v1	v2	v3	v4
v1	1	1	0	1
V2	0	0	0	0
v3	1	1	0	0
V4	0	0	2	0

Conceitos Básicos

- Representação de grafos
  - Matriz de adjacência
    - OBS.:
      - Laço 1 na diagonal principal
      - Arestas paralelas: numero maior que 1 (no de arestas)
      - Grafo não direcionado: a matriz é simétrica (50% espaço)
      - Complexidade computacional proporcional a n2

Conceitos Básicos

- Representação de grafos
  - Matriz de custo
    - Um grafo simples valorado pode ser representado por sua matriz de custo w=[wij], onde:
      - Wij=
        - » custo da aresta se (vi,vj) pertence a A
        - » 0 ou inf caso contrário

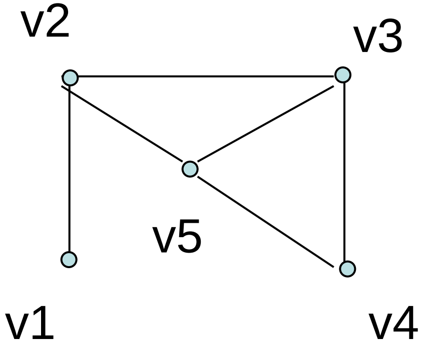


W=

	v1	v2	v3
v1	0	30	50
V2	30	0	40
v3	50	40	0

Conceitos Básicos

- Representação de grafos
  - Lista de arestas
    - É uma forma eficiente de para representar grafos esparsos utilizando-se duas listas de vértices, onde a primeira contém os inícios das arestas, e a segunda, os respectivos términos.
      - Dois vetores g(início) e h(término)

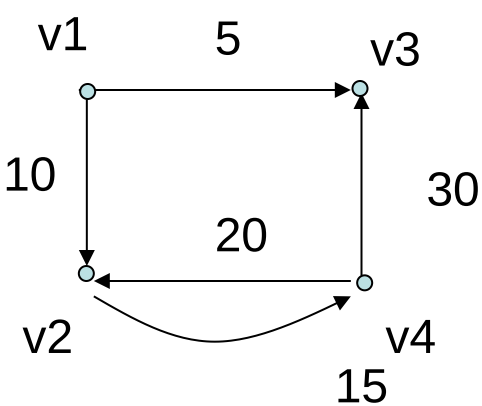


g={v1,v2,v2,v3,v3,v4}

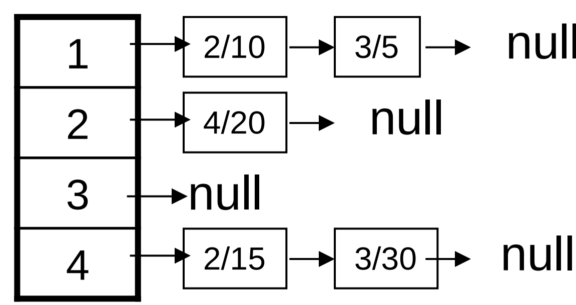
h={v2,v3,v5,v4,v5,v5}

Conceitos Básicos

- Representação de grafos
  - Lista de adjacência
    - Um vértice y em um grafo é chamado de sucessor de outro vértice x, se existe uma aresta dirigida de x para y
    - Um grafo pode ser descrito por uma estrutura de adjacência, isto é, pela lista de todos os sucessores de cada vértice.

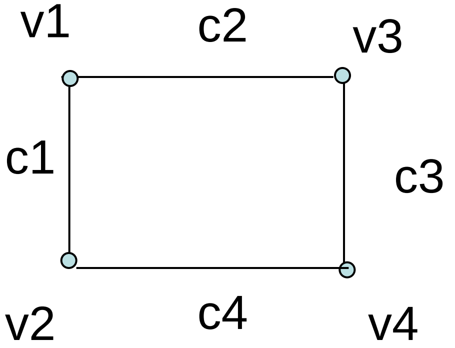


v1	v2 v3
v2	v4
v3	-
v4	v2 v3



Conceitos Básicos

- Representação de grafos
  - Matriz de incidência
    - Dado um grafo G(V,A) de n vértices e m arestas, a matriz de incidência de G é denotada por B=[bij] e é uma matriz nXm definida como:
      - bij=
        - » 1 se vj for o vértice inicial de cj
        - » 0 caso contrário ou inf

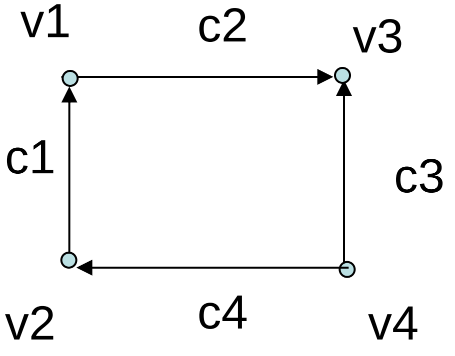


B=

	c1	c2	c3	c4
v1	1	1	0	0
v2	1	0	0	1
v3	0	1	1	0
v4	0	0	1	1

Conceitos Básicos

- Representação de grafos
  - Matriz de incidência
    - Quando o grafo é direcionado, então B pode ser definida como:
      - bij=
        - » -1 se vi for o vértice inicial de cj
        - » +1 se vi for o vértice final de cj
        - » 0 caso contrário ou inf



B=

	c1	c2	c3	c4
v1	+1	-1	0	0
v2	-1	0	0	+1
v3	0	+1	+1	0
v4	0	0	-1	-1

TAD Grafo

- Um grafo pode ser visto como uma coleção de elementos que são armazenados nos vértices e suas arestas;
- Pode-se armazenar elementos em um grafo tanto nos vértices como nas arestas (ou em ambos)
- Os algoritmos em grafos serão considerados independentemente da implementação das operações básicas do grafo

TAD Grafo

- Inicialmente será feita uma simplificação do TAD Grafo
- Será utilizado com grafos não dirigidos

TAD Grafo

- Principais métodos do TAD Grafo
- (acesso -simplificado)
  - finalVertices(e)
    - Retorna um array armazenando os vértices finais da aresta e.

  - oposto(v, e)
    - Retorna o vértice oposto de v em e, ou seja, o vértice final da aresta e separado do vértice v. Um erro ocorre se e não é incidente a v

  - éAdjacente(v, w)
    - Retorna true se v e w são adjacentes

TAD Grafo

- Principais métodos do TAD Grafo
- (acesso -simplificado)
  - substituir(v, x)
    - Substitui o elemento armazenado no vértice V por X
  - substituir(e, x)
    - Substitui o elemento armazenado na aresta e com x

TAD Grafo

- Principais métodos do TAD Grafo
- (atualização -simplificado)
  - inserirVertice(o)
    - Insere e retorna um novo vértice armazenando o elemento o
  - inserirAresta(v, w, o)
    - Insere e retorna uma nova aresta não-dirigida (v,w) armazenando o elemento o

TAD Grafo

- Principais métodos do TAD Grafo
- (atualização -simplificado)
  - removeVértice(v)
    - Remove o vértice v (e todas as arestas incidentes) e retorna o elemento armazenado em v
  - removeAresta(e)
    - Remove a aresta e, retornando o elemento armazenado

TAD Grafo

- Principais métodos do TAD Grafo
- (Métodos Iteradores -simplificado)
  - arestasIncidentes(v)
    - Retorna uma coleção de todas as arestas incidentes sob o vértice v (vértice v)
  - vertices()
    - Retorna uma coleção de todos os vértices no grafo.
  - arestas()
    - Retorna uma coleção de todas as arestas no grafo

TAD Grafo

- Principais métodos do TAD Grafo
- (Métodos Iteradores -simplificado)
  - arestasIncidentes(v)
    - Retorna uma coleção de todas as arestas incidentes sob o vértice v (vértice v)
  - vertices()
    - Retorna uma coleção de todos os vértices no grafo.
  - arestas()
    - Retorna uma coleção de todas as arestas no grafo

TAD Grafo

- Principais métodos do TAD Grafo (Dirigido)
  - éDirecionado(e)
    - Testa se a aresta é direcionada
  - inserirArestaDirecionada(v,w,o)
    - Insirir uma nova aresta dirigida com origem em v e destino em w e armazenando o elemento o.