IFRN - Campus Natal/Central - Licenciatura em Física

Prof. Tibério Alves, D. Sc.

Eletromagnetismo Clássico I - 2019.2

Complemento I - A Delta de Dirac

26 de julho de 2019

Resumo

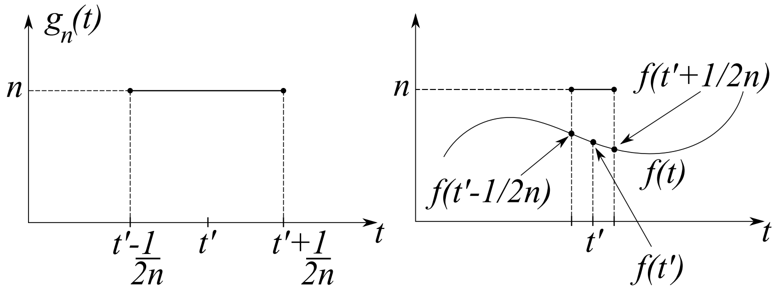
Neste complemento, vamos estudar a função delta de Dirac e algumas de suas propriedades.

1 Delta de Dirac

Considere uma função $g_n(t)$, definida da seguinte maneira,

$$g_n(t-t') = \begin{cases} n, & |t-t'| \leq 1/2n \\ \\ 0, & |t-t'| > 1/2n. \end{cases} \tag{1}$$

Tal função representa uma região retangular compreendida entre os pontos $t' + 1/2n$ e $t' - 1/2n$ de largura $\Delta t = 1/n$ e altura n, sendo nula nos demais pontos (veja a figura 1)



(a) (b)

Figura 1: Em (a) temos o gráfico de uma função retangular dada pela função $g_n(t-t')$. Note que ao passo que largura $\Delta t = 1/n$ diminui, a altura do retângulo aumenta, mantendo a área fixa. Em (b), temos o gráfico de $g_n(t-t')$ e de uma função contínua $f(t)$.

Note que, mesmo que tomemos o limite $n \to \infty$, a integral da área sob a curva de $g_n(t-t')$ permanece finita e igual a 1, ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(t-t')dt \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left[n \int_{t'-1/2n}^{t'+1/2n} dt \right] \tag{3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left[n \cdot \left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \right) \right] = 1. \tag{4}$$

Perceba que o limite $n \to \infty$ para a função $g_n(t-t')$ faz com que a função seja infinita para $t = t'$ e nula para $t \neq t'$. De maneira resumida, podemos representar este limite da seguinte forma,

$$\lim_{n\to\infty} g_n(t-t') = \begin{cases} 0, \ t \neq t' \\ \\ \infty, \ t = t'. \end{cases} \tag{5}$$

As funções $g_n(t-t')$ que possuem esta representação e obedecem a uma integral finita da equação 4, são chamadas de **Delta de Dirac**[1] $\delta(t-t')$, definida como

$$\delta(t-t') = \begin{cases} 0, \ t \neq t' \\ \\ \infty, \ t = t', \end{cases} \tag{6}$$

com integral finita

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t')dt = 1. \tag{7}$$

O formalismo matemático baseado na análise funcional foi feito por Laurent Schwartz[2] no seu trabalho "*Théorie des Distributions*" (Teoria das Distribuições) de 1950.

Na física e na engenharia, esta função as vezes é chamada de **função impulso** pois remete a uma situação, por exemplo, de uma colisão mecânica entre bolas de bilhar (veja figura 2).

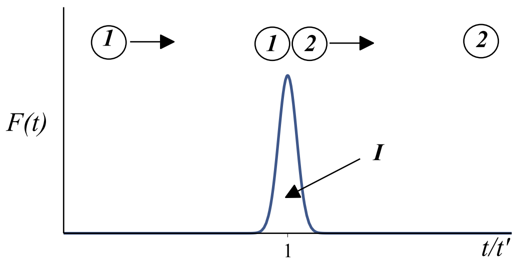


Figura 2: Uma possível representação gráfica de uma força em função do tempo durante uma colisão mecânica elástica entre duas bolas de bilhar. A bola 1 colide de forma elástica com a bola 2. A força $F(t)$ representa a intensidade da força de interação entre as duas bolas no momento da colisão. O Impulso I é a área sob a curva da $F(t)$.

O intervalo de uma colisão, neste caso, é extremamente pequeno e a força que gera impulso adquire valores elevadíssimos. Considerando uma força $F(t)$ e uma colisão em um instante t', não é tão interessante a descrição detalhada da função $F(t)$ durante a colisão, mas sim o impulso I gerado por ela, ou seja,

$$I = \int_{0}^{\infty} F(t)dt. \tag{8}$$

Apesar da força atingir valores altíssimos e o intervalo de tempo da colisão ser ínfimo, esta integral é finita.

Exercício 1. A função $g_n(t-t')$ apresentada anteriormente é um exemplo de uma distribuição cujo limite $n \to \infty$ conduz a uma representação de uma função delta de Dirac. No entanto, várias funções podem apresentar estas características. Considere então a função

$$g_n(t-t') = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-n(t-t')^2}, \tag{9}$$

com gráficos para $n = 10$, $n = 30$, $n = 50$ e $n = 300$ apresentados na figura 3 a seguir. Mostre que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(t-t')dt = 1 \tag{10}$$

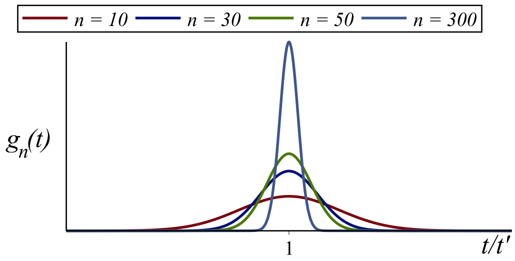


Figura 3: Gráficos para $n = 10$, $n = 30$, $n = 50$ e $n = 300$ da função $g_n(t-t') = \sqrt{\frac{n}{\pi}}e^{-n(t-t')^2}$. Note que, com o limite $\lim_{n\to\infty}$, $g_n(t-t')$ tendo ao infinito ao passo que a extensão da largura da função $g_n(t-t')$ tende a zero.

A função $g_n(t-t')$ é conhecida como **função distribuição Gaussiana**, muito importante no estudo da estatística.

Propriedade de filtro

Considere agora a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t')dt \tag{11}$$

sendo $f(t)$ uma função contínua e com todas as suas derivadas contínuas em t'. Observando a figura 1.b, note que podemos aproximar a função $f(t)$ através de sua série de Taylor centrada em t', ou seja,

$$f(t) = f(t') + \dot{f}(t')(t-t') + \ddot{f}(t')\frac{(t-t')^2}{2!} + \dddot{f}(t')\frac{(t-t')^3}{3!} + ... \tag{12}$$

A integral mencionada seria então igual a

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t')dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t')\delta(t-t')dt + \int_{-\infty}^{\infty} \dot{f}(t')(t-t')\delta(t-t')dt + \\ \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{f}(t')\frac{(t-t')^2}{2!}\delta(t-t')dt + \int_{-\infty}^{\infty} \dddot{f}(t')\frac{(t-t')^3}{3!}\delta(t-t')dt...\end{aligned} \tag{13}$$

O primeiro termo (termo de ordem zero) é simples de calcular. Com efeito,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t')\delta(t-t')dt = f(t')\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t')dt = f(t'). \tag{14}$$

O segundo termo (termo de primeira ordem), é calculado através de

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{f}(t')(t-t')\delta(t-t')dt = \dot{f}(t')\lim_{n\to\infty}\int_{t'-1/2n}^{t'+1/2n} n(t-t')dt, \tag{15}$$

onde voltamos a usar a representação da função $g_n(t-t')$ da equação 1. Dessa maneira, temos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{f}(t')(t-t')\delta(t-t')dt = \dot{f}(t')\lim_{n\to\infty} n\left.\frac{(t-t')^2}{2}\right|_{t'+1/2n}^{t'-1/2n}, \tag{16}$$

$$\dot{f}(t')\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\left(\frac{1}{4n^2} - \frac{1}{4n^2}\right) = 0. \tag{17}$$

Portanto, temos que o segundo termo será nulo.

[1]Paul A. M. Dirac: físico inglês que usou essas representações em seus trabalhos de mecânica quântica, como no livro "*The Principles of Quantum Mechanics*".

[2]Laurent Schwartz: matemático francês (1915-2002).

O terceiro termo (termo de segunda ordem), é calculado através de

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ddot{f}(t')\frac{(t-t')^2}{2!}\delta(t-t')dt = \ddot{f}(t')\lim_{n\to\infty} n\left.\frac{(t-t')^3}{2!3}\right|_{t'+1/2n}^{t'-1/2n}, \tag{18}$$

$$\ddot{f}(t')\lim_{n\to\infty}\frac{n}{6}\left(\frac{1}{8n^3}+\frac{1}{8n^3}\right), \tag{19}$$

$$\ddot{f}(t')\lim_{n\to\infty}\frac{1}{24n^2} = 0. \tag{20}$$

Sendo assim, o terceiro termo será nulo. Para todas as integrais em ordens superiores, seus os resultados serão ou potências pares ou potências ímpares de $(t-t')$, tendo como resultado zero para todas elas.

Concluímos então que a integração conduziu a apenas um valor diferente de zero, isto é, $f(t')$, nos permitindo escrever que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t')dt = f(t'). \tag{21}$$

Esta última equação apresenta uma propriedade chamada de **propriedade de filtro**, pois seleciona de todos os valores de $f(t)$ apenas o valor $f(t')$.

Podemos resumir até agora, que a delta de Dirac possui as seguintes características:

$$\delta(t-t') = \begin{cases} 0, & t \neq t' \\ \\ \infty, & t = t', \end{cases} \tag{22}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t')dt = 1, \tag{23}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t')dt = f(t'). \tag{24}$$

Vale salientar que a função delta de Dirac não se apresenta como uma função propriamente dita, no contexto que usualmente nos referimos a uma função. Ela é bastante importante em várias áreas da física como, por exemplo, o eletromagnetismo. Neste contexto, ela surge como uma forma de descrevermos uma "densidade" de carga para uma carga pontual. Uma carga pontual de valor finito q, deve possui uma densidade infinita uma vez que seu volume associado a um ponto seria nulo.

Mais propriedades da delta de Dirac

Usando as propriedades listadas anteriormente, podemos mostrar que a delta de Dirac possui outras propriedades que podem ser úteis no contexto da física, sendo ela:

(I) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t')dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t+t')dt = f(t')$.

(II) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(at)dt = \dfrac{1}{|a|}f(0)$.

(III) $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta^{(n)}(t-t')dt = (-1)^n f(t')$ com $\delta^{(n)}$ sendo a n-ésima derivada.