



Licenciatura em Física - Campus Natal/Central

Prof. Tibério Alves, D. Sc.

Eletromagnetismo Clássico I - 2019.2

Complemento II - A equação de Laplace em coordenadas cilíndricas

6 de setembro de 2019

Resumo

Neste complemento, vamos estudar a equação de Laplace em coordenadas cilíndricas encontrando sua solução geral e, posteriormente, resolver o problema do cilindro condutor muito longo posto em campo elétrico inicialmente uniforme.

1 Equação de Laplace em coordenadas cilíndricas

A equação de Laplace em coordenadas cilíndricas se apresenta através do operador Laplaciano nestas coordenadas, ou seja,

$$\nabla^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (1)$$

Iremos nos ater a problemas com total simetria na coordenada z , de tal forma que $V = V(\rho, \phi)$. Isto reduz a equação de Laplace para

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} \right) = 0. \quad (2)$$

Podemos recorrer ao método de separação de variáveis para V , de tal maneira que $V(\rho, \phi) = R(\rho)\Phi(\phi)$, o que conduz a equação

$$\frac{\Phi}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) + \frac{R}{\rho^2} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} \right) = 0, \quad (3)$$

onde podemos multiplicar a equação por $\rho^2/R\Phi$, chegando à

$$\frac{\rho}{R} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial R}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\Phi} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} \right) = 0. \quad (4)$$

Vamos escolher uma constante de separação do tipo k^2 , cujas razões ficarão claras adiante. Sendo assim, temos duas equações diferenciais ordinárias a serem resolvidas, ou seja,

$$\rho^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \rho \frac{dR}{d\rho} - Rk^2 = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} + k^2 \Phi = 0. \quad (6)$$

Inicialmente, resolveremos ambas as equações para $k = 0$, isto é,

$$\frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0. \quad (8)$$

A equação radial tem solução $R(\rho) = A_0 + B_0 \ln \rho$ e a equação em ϕ possui solução linear $\Phi(\phi) = C_0 + D_0 \phi$. Vamos trabalhar com sistemas físicos que obedecem a condições de contorno periódicas, de tal forma que $\Phi(\phi) = \Phi(\phi + 2\pi)$. Sendo assim, a solução linear em ϕ não se aplica a esta condição, o que nos permite escrever que, para $k = 0$, temos a solução

$$V(\rho, \phi) = A_0 + B_0 \ln \rho. \quad (9)$$

Note que esta solução está associada a um potencial elétrico de um fio muito longo e fino com densidade linear de carga uniforme.

Vamos resolver agora para um k arbitrário. A equação 5 é um equação do tipo Cauchy-Euler e a equação 6 é uma equação harmônica. A equação de Cauchy-Euler pode ser resolvida através da substituição $\rho = e^t$. Sendo assim, usando a regra da cadeia,

$$\frac{dR}{d\rho} = \frac{dt}{d\rho} \frac{dR}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{dR}{dt} \quad (10)$$

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} = -\frac{1}{\rho^2} \left[\frac{dR}{dt} - \frac{d^2 R}{dt^2} \right]. \quad (11)$$

Substituindo as equações 10 e 11 em 5, obtemos a seguinte equação,

$$\frac{d^2 R}{dt^2} - Rk^2 = 0, \quad (12)$$

cuja equação característica é

$$\lambda^2 - k^2 = 0, \quad (13)$$

ficando claro que a escolha da constante de separação conduziu à raízes que são quadrados perfeitos. As soluções são então

$$\lambda_+ = k \quad , \quad \lambda_- = -k, \quad (14)$$

de tal maneira que a solução radial toma então a seguinte forma,

$$R(\rho) = A\rho^k + B\rho^{-k}. \quad (15)$$

A equação harmônica 6 possui a seguinte solução

$$\Phi(\phi) = C \sin k\phi + D \cos k\phi, \quad (16)$$

o que nos permite escrever a solução geral para a equação de Laplace em coordenadas cilíndricas

$$\boxed{V(\rho, \phi) = A_0 + B_0 \ln \rho + \sum_{k \neq 0} (A_k \rho^k + B_k \rho^{-k}) (C_k \sin k\phi + D_k \cos k\phi)}. \quad (17)$$

É interessante notar também que as soluções $\sin k\phi$ e $\cos k\phi$ obedecem a uma relação de ortogonalidade, ou seja,

$$\int_0^{2\pi} \sin k\phi \sin k'\phi \, d\phi = \begin{cases} 0, & \text{para } k \neq k' \\ \pi, & \text{para } k = k', \end{cases} \quad (18)$$

$$\int_0^{2\pi} \cos k\phi \cos k'\phi \, d\phi = \begin{cases} 0, & \text{para } k \neq k' \\ \pi, & \text{para } k = k', \end{cases} \quad (19)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin k\phi \cos k'\phi \, d\phi = 0, \quad \forall k, k'. \quad (20)$$

Exemplo 1. Um cilindro metálico muito longo com seu eixo coincidindo com o eixo z e de raio a é imerso em campo elétrico inicialmente uniforme dado por $\vec{E} = E_0\hat{x}$ e potencial elétrico $V(\rho, \phi) = -E_0\rho \cos \phi$. Determine o campo e potencial elétrico externos ao cilindro e a densidade superficial de carga induzida no cilindro.

Solução: As condições de contorno são:

- (i) $V(\rho = a, \phi) = 0$
- (ii) $\lim_{\rho \gg a} V(\rho, \phi) = -E_0\rho \cos \phi$

Aplicando a condição (i), temos

$$V(\rho = a, \phi) = A_0 + B_0 \ln a + \sum_{k \neq 0} (A_k a^k + B_k a^{-k}) (C_k \sin k\phi + D_k \cos k\phi) = 0. \quad (21)$$

Para que esta equação tenha solução independente da variável ϕ , e também seja finita, temos que $A_0 = B_0 = A_k a^k + B_k a^{-k} = 0$, de onde tiramos que $B_k = -A_k a^{2k}$ ($k \neq 0$). Nossa solução se reduz a

$$V(\rho, \phi) = \sum_{k \neq 0} A_k \left(\rho^k - \frac{a^{2k}}{\rho^k} \right) (C_k \sin k\phi + D_k \cos k\phi). \quad (22)$$

Aplicando a condição (ii), temos

$$\lim_{\rho \gg a} V(\rho, \phi) = \sum_{k \neq 0} A_k \rho^k (C_k \sin k\phi + D_k \cos k\phi) = -E_0\rho \cos \phi. \quad (23)$$

Devido a ortogonalidade das funções $\cos k\phi$ e $\sin k\phi$, fica claro que todos os coeficientes de $\sin k\phi$, ou seja, os C_k devem ser todos nulos, o que reduz a equação acima para

$$\sum_{k \neq 0} A'_k \rho^k \cos k\phi = -E_0\rho \cos \phi, \quad (24)$$

onde aglutinamos $A'_k = A_k D_k$. Novamente, por argumentos de ortogonalidade, temos que apenas um A'_k que é diferente de zero, ou seja, aquele para o qual $k = 1$, de onde tiramos que

$$A'_1 \rho \cos \phi = -E_0\rho \cos \phi, \quad (25)$$

$$A'_1 = -E_0. \quad (26)$$

A nossa solução, que obedece as condições de contorno do problema, é então dada por

$$V(\rho, \phi) = A'_1 \left(\rho - \frac{a^2}{\rho} \right) \cos \phi. \quad (27)$$

$$\boxed{V(\rho, \phi) = -E_0\rho \left[1 - \left(\frac{a}{\rho} \right)^2 \right] \cos \phi.} \quad (28)$$

Podemos determinar o campo elétrico através de $\vec{E} = -\nabla V$, o que conduz à

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial \rho} \hat{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi} \quad (29)$$

$$\boxed{\vec{E} = E_0 \left[1 + \left(\frac{a}{\rho} \right)^2 \right] \cos \phi \hat{\rho} + E_0 \left[\left(\frac{a}{\rho} \right)^2 - 1 \right] \sin \phi \hat{\phi}.} \quad (30)$$

Uma visualização gráfica para esta campo e suas linhas de campo se encontra na figura 1(a) a seguir.

Podemos determinar também a densidade superficial de carga polarizada na superfície cilíndrica. Vamos usar a equação para descontinuidade da componente normal do campo elétrico em uma interface, isto é,

$$E_{\perp}^{acima} - E_{\perp}^{abaixo} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (31)$$

Imediatamente acima da superfície do cilindro ($\rho = a$) só temos componente radial, fato já esperado para um condutor, de valor igual a $\vec{E} = 2E_0 \cos \phi \hat{\rho}$. Sendo assim, $E_{\perp}^{acima} = 2E_0 \cos \phi$ e $E_{\perp}^{abaixo} = 0$, o que conduz à

$$\sigma(\phi) = 2\epsilon_0 E_0 \cos \phi. \quad (32)$$

Uma visualização gráfica para esta densidade superficial de carga se encontra na figura 1(b) a seguir.

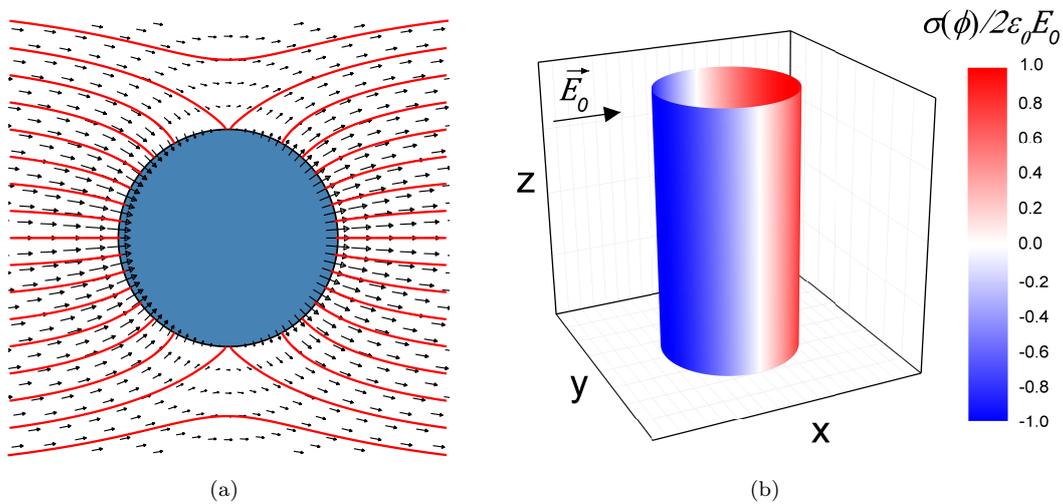


Figura 1: Em (a), temos a configuração do campo elétrico e linhas de campo distorcidas vistas através do eixo z , ou seja, no plano $x-y$ devido à indução de carga na superfície do cilindro. Em (b), temos o mapeamento colorido da densidade superficial de carga induzida $\sigma(\phi)/2\epsilon_0 E_0$ para um corte do cilindro.