

IFRN - Campus Natal/Central - Licenciatura em Física

Prof. Tibério Alves, D. Sc.

Eletromagnetismo Clássico I - 2019.2

Fascículo I - As equações fundamentais da eletrostática

25 de agosto de 2019

Resumo

Neste fascículo, vamos estudar as equações fundamentais da eletrostática e calcular potenciais e campos elétricos de algumas distribuições de carga. Vamos obter também as condições de contorno para eletrostática em interfaces.

1 Equações fundamentais da eletrostática

1.1 O campo elétrico de distribuições discretas e contínuas de cargas

Nossa abordagem das equações fundamentais da eletrostática se inicia com uma das constatações experimentais mais importantes do eletromagnetismo, a **lei de Coulomb**. A lei de Coulomb estabelece que duas cargas pontuais interagem com uma força diretamente proporcional ao produto das cargas e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre elas. Considere duas cargas pontuais q_1 e q_2 nas posições \vec{r}_1 e \vec{r}_2 com $\vec{z}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

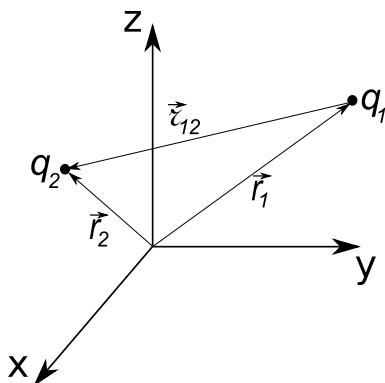


Figura 1: Cargas pontuais q_1 e q_2 nas posições \vec{r}_1 e \vec{r}_2 com $\vec{z}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

A força elétrica (no sistema internacional) que atua sobre a carga q_2 devida à carga q_1 é expressa matematicamente por

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{z_{12}^2} \hat{z}_{12}, \quad (1)$$

sendo a quantidade $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2$ a **permissividade do espaço livre**. A força que atua sobre a carga q_1 devida à carga q_2 é obtida troca dos dos índices 1 e 2.

Para um conjunto de N cargas pontuais, a força sobre a i -ésima carga, ou seja, q_i , obedece ao chamado **princípio da superposição**, e é dada por

$$\vec{F}_i = \sum_{j=1(i \neq j)}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}^2} \hat{z}_{ij}, \quad (2)$$

Isto é, a força é obtida mediante a soma de todas as forças exercidas pelas j -ésimas cargas sobre a i -ésima carga.

Podemos definir agora um conceito muito importante na teoria eletromagnética, isto é, o **campo elétrico**. Esta quantidade indica a força elétrica sofrida por unidade de carga, sobre uma carga de prova, pela fato desta estar sob influência de uma distribuição de cargas fonte, que consideramos não ser afetada pela carga de prova. Como a soma é no índice j , podemos fatorar a carga q_i do somatório escrevendo

$$\frac{\vec{F}_i}{q_i} = \sum_{j=1(i \neq j)}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{ij}^2} \hat{z}_{ij}, \quad (3)$$

e definimos o campo elétrico na posição \vec{r}_i , como sendo

$$\vec{E}(\vec{r}_i) = \sum_{j=1(i \neq j)}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{ij}^2} \hat{z}_{ij}, \quad (4)$$

de tal modo que o campo elétrico \vec{E}_j devido a uma única carga j exercido na posição i é dado

$$\vec{E}_j(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{ij}^2} \hat{z}_{ij}. \quad (5)$$

Para distribuições contínuas de carga, vamos recorrer à ideia fundamental do cálculo integral e fracionar um volume arbitrário \mathcal{V} , que contém uma distribuição volumétrica de carga, em elementos infinitesimais de volume, digamos $d\tau'$, contendo uma carga $dq' = \rho(\vec{r}')d\tau'$ com $\rho(\vec{r}')$ sendo a densidade volumétrica especificada para a distribuição de carga. Desta forma, o campo elétrico devido este elemento infinitesimal é considerado como um campo elétrico devido uma carga pontual. O vetor \vec{r}' indica a posição do elemento infinitesimal de volume, o vetor \vec{r} indica a posição de interesse para cálculo do campo e o vetor $\vec{z} = \vec{r} - \vec{r}'$ indica a posição \vec{r} relativa a \vec{r}' (veja a figura 2). Com essas definições, o campo elétrico na posição \vec{r} devido toda distribuição é dado pela integral sobre todo volume, ou seja,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\vec{r}')d\tau'}{z^2} \hat{z}. \quad (6)$$

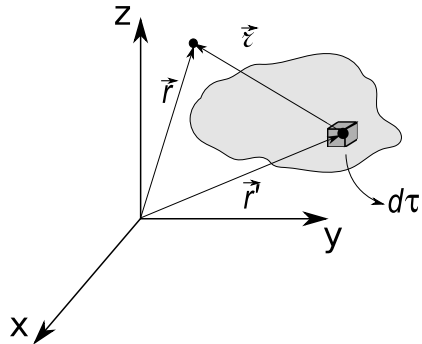


Figura 2: Representação esquemática de uma distribuição volumétrica de cargas e os vetores de interesse para integral do campo elétrico.

Caso a distribuição de carga seja superficial ou linear, temos, respectivamente, as seguintes expressões

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\vec{r}')da'}{z^2} \hat{z}, \quad (7)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\lambda(\vec{r}') dl'}{z^2} \hat{z}, \quad (8)$$

com σ e λ sendo as densidades superficiais e lineares de carga, respectivamente.

Exemplo 1. Considere uma anel circular de raio R com centro coincidindo com a origem do sistema de coordenadas estando sobre o plano x - y (veja figura 3 a seguir). Sua densidade linear de carga λ é uniforme. Determine o campo elétrico num ponto de posição $\vec{r} = z\hat{z}$, ou seja, um ponto sobre o eixo z .

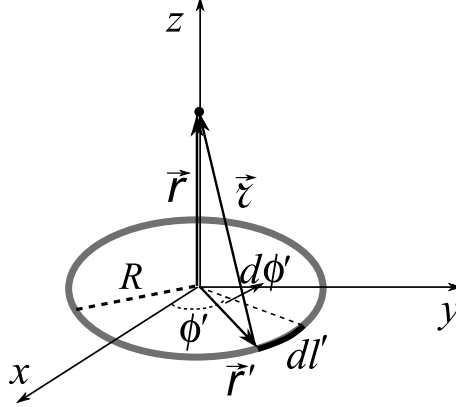


Figura 3: Representação esquemática de um anel carregado e os vetores de interesse para integração do campo elétrico.

Solução: Em coordenadas cilíndricas, $dl' = R d\phi'$ e $\vec{r}' = R\hat{\rho} = R(\cos\phi' \hat{x} + \sin\phi' \hat{y})$. Dessa forma, $\vec{z} = \vec{r} - \vec{r}' = -R(\cos\phi' \hat{x} + \sin\phi' \hat{y}) + z\hat{z}$ com $z^2 = R^2 + z^2$. Portanto, a integral do campo elétrico para esta densidade linear de carga é dada por

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\lambda(\vec{r}') dl'}{z^2} \hat{z}, \quad (9)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\lambda(\vec{r}') dl'}{z^3} \vec{z}, \quad (10)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda R d\phi'}{(R^2 + z^2)^{3/2}} [-R(\cos\phi' \hat{x} + \sin\phi' \hat{y}) + z\hat{z}]. \quad (11)$$

As integrais nas componentes x e y se anulam pois $\int_0^{2\pi} \cos\phi' d\phi' = \int_0^{2\pi} \sin\phi' d\phi' = 0$, fazendo com que o campo elétrico tenha componente apenas na direção z , ou seja,

$$\vec{E}(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda z R}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\phi' \hat{z}, \quad (12)$$

$$\boxed{\vec{E}(z) = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{\lambda z R}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \hat{z}}. \quad (13)$$

Perceba que no caso limite de $z \gg R$,

$$\vec{E}(z) = \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{\lambda z R}{z^3} \hat{z}, \quad (14)$$

$$\vec{E}(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z^2} \hat{z}, \quad (15)$$

com $Q = 2\pi R\lambda$ sendo a carga total do anel. Isso mostra que no limite de $z \gg R$, o campo elétrico é típico de **carga pontual**.

1.2 O rotacional de \vec{E}

Com intuito de obter as equações fundamentais da eletrostática, vamos inicialmente calcular o rotacional do campo eletrostático. No momento, podemos proceder de duas maneiras. Uma primeira maneira seria partir da equação 6 e calcular diretamente seu rotacional. Uma segunda maneira seria calcular quanto vale a circulação em um caminho fechado C para o campo eletrostático \vec{E} devido a uma carga pontual e invocar o teorema de Stokes. Vamos mostrar através das duas formas.

Considere inicialmente uma carga pontual q posta na origem do sistema de coordenadas. Seu campo elétrico é expresso por

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}. \quad (16)$$

A integral de linha deste campo elétrico desde um ponto \vec{a} até um ponto \vec{b} é calculado através de

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (17)$$

Em coordenadas esféricas, $d\vec{l} = dr\hat{r} + r d\theta\hat{\theta} + r \sin\theta d\phi\hat{\phi}$, ficamos então com a seguinte integral de linha

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot (dr\hat{r} + r d\theta\hat{\theta} + r \sin\theta d\phi\hat{\phi}), \quad (18)$$

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \frac{dr}{r^2}, \quad (19)$$

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left. \frac{r^{-2+1}}{-2+1} \right|_{r_a}^{r_b}, \quad (20)$$

$$\int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right). \quad (21)$$

Se considerarmos um caminho fechado C , $r_a = r_b$, que nos garante que

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0. \quad (22)$$

Por outro lado, invocando o teorema de Stokes, temos que

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{a}, \quad (23)$$

Sendo S qualquer superfície que tenha C como contorno. Neste caso, temos que

$$\int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{a} = 0, \quad (24)$$

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = 0}. \quad (25)$$

Apesar de nossa demonstração ser baseada num campo de uma carga pontual, ela se mostra geral na eletrostática visto que podemos descrever qualquer distribuição de carga como uma superposição de cargas pontuais, como indica a integral na equação 6.

Vamos agora demonstrar através do cálculo direto do rotacional na equação 6, ou seja,

$$\nabla \times \vec{E} = \nabla \times \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\vec{r}') d\tau'}{\mathcal{z}^2} \hat{z} \right]. \quad (26)$$

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}') d\tau' \left[\nabla \times \left(\frac{\hat{z}}{\mathcal{z}^2} \right) \right]. \quad (27)$$

Observe que o cálculo se resume apenas em calcular o rotacional de uma função vetorial $\vec{f} = \frac{\hat{z}}{\mathcal{z}^2} = \frac{\vec{z}}{\mathcal{z}^3}$. Em coordenadas cartesianas, os vetores de interesse são $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$, $\vec{r}' = x'\hat{x} + y'\hat{y} + z'\hat{z}$ e $\vec{z} = (x - x')\hat{x} + (y - y')\hat{y} + (z - z')\hat{z}$ com $\mathcal{z}^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$. Vamos calcular de

início somente a componente x e facilmente generalizar para as demais componentes. A componente x do rotacional de \vec{f} é dada por

$$(\nabla \times \vec{f})_x = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right), \quad (28)$$

com

$$f_z = \frac{(z - z')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}}, \quad (29)$$

$$f_y = \frac{(y - y')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}}. \quad (30)$$

Calculando as derivadas temos

$$\frac{\partial f_z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{(z - z')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \right\}, \quad (31)$$

$$\frac{\partial f_z}{\partial y} = -\frac{3(z - z')(y - y')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{5/2}}, \quad (32)$$

$$\frac{\partial f_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{(y - y')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}} \right\}, \quad (33)$$

$$\frac{\partial f_y}{\partial z} = -\frac{3(y - y')(z - z')}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{5/2}}, \quad (34)$$

de onde concluímos que

$$(\nabla \times \vec{f})_x = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right) = 0. \quad (35)$$

O mesmo se sucede para as demais componentes devido a forma da função $\frac{\hat{z}}{z^3}$, concluindo que $\nabla \times \left(\frac{\hat{z}}{z^3} \right) = 0$. Logo, o rotacional do campo eletrostático é nulo, ou seja,

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = 0}. \quad (36)$$

Potencial elétrico

De acordo com a equação 25, o campo elétrico é do tipo **irrotacional** e pode ser escrito como sendo proveniente de algum potencial escalar. Não é tão difícil perceber isso quando olhamos para o rotacional do campo eletrostático explicitamente (em coordenadas cartesianas), ou seja,

$$\nabla \times \vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \hat{z} = 0. \quad (37)$$

Para que o rotacional acima seja nulo, todas as componentes devem se nulas. Essa condição é adquirida se assumirmos que o campo eletrostático seja escrito como um gradiente de uma função escalar V , de tal forma que

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{x} - \frac{\partial V}{\partial y} \hat{y} - \frac{\partial V}{\partial z} \hat{z}. \quad (38)$$

Essa função escalar é chamada de **potencial elétrico**. Note que, por exemplo, a componente x é nula,

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} = 0, \quad (39)$$

pela propriedade de derivadas parciais. O sinal negativo na equação 38 é uma convenção para que a energia total de sistemas eletrostáticos seja a **soma** da sua energia cinética com a energia potencial elétrica. É importante notar que a equação 38 faz sentido quando o campo elétrico é uma **função contínua** e **diferenciável**, pois o próprio cálculo do $\nabla \times \vec{E}$ assume estas considerações sobre \vec{E} , fatos que não ocorrem

quando temos uma distribuição superficial, por exemplo, como veremos nas condições de contorno. Nestes casos, iremos mostrar que devemos tomar um processo limite .

A definição do potencial elétrico para um determinado ponto numa posição \vec{r} , em relação a um ponto de referência \vec{O} , é feita pela integração

$$V(\vec{r}) = - \int_{\vec{O}}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l}, \quad (40)$$

Se considerarmos uma carga elétrica pontual de valor q na origem do sistema de coordenadas, para qualquer caminho C temos que

$$V(\vec{r}) = - \int_{\vec{O}}^{\vec{r}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot (dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta} + r\sin\theta d\phi\hat{\phi}), \quad (41)$$

$$V(\vec{r}) = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\vec{O}}^{\vec{r}} \frac{dr}{r^2}, \quad (42)$$

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \Big|_{\vec{O}}^{\vec{r}}. \quad (43)$$

É comum tomar como referência para o potencial elétrico uma posição infinitamente distante da localização da carga (para distribuições finitas de carga), ou seja, vamos fazer $\lim_{r \rightarrow \infty} V(\vec{r}) = 0$, onde chegamos ao potencial elétrico devido uma carga pontual localizada na origem do sistema de coordenadas no ponto arbitrário de posição \vec{r} ,

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}. \quad (44)$$

Usando a mesma abordagem para o campo elétrico de distribuições contínuas de carga, o potencial elétrico devido uma distribuição contínua de carga de densidade volumétrica ρ é dado pela seguinte integração

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\vec{r}') d\tau'}{z}. \quad (45)$$

Para as distribuições superficiais e lineares temos, respectivamente,

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{S}} \frac{\sigma(\vec{r}') da'}{z}, \quad (46)$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{C}} \frac{\lambda(\vec{r}') dl'}{z}. \quad (47)$$

Exemplo 2. Considere uma casca esférica de raio R com centro localizado na origem do sistema de coordenadas possuindo densidade superficial σ uniforme. Determine o potencial elétrico para pontos dentro ($r < R$), fora ($r > R$) e sobre ($r = R$) a superfície esférica através da equação 46.

Solução: Sem perdas de generalidade, podemos fazer o vetor posição \vec{r} apontar da direção z , de tal forma que $\vec{r} = r\hat{z}$ (veja a figura 4). A localização do elemento de carga $dq' = \sigma R^2 \sin\theta' d\theta' d\phi'$ é o vetor \vec{r}' e o vetor posição \vec{z} em relação ao elemento de carga tem módulo dado pela lei dos cossenos $z = \sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos\theta'}$. Sendo assim, a partir da equação 46, a integral do potencial elétrico é dada por

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sigma R^2 \sin\theta' d\theta' d\phi'}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos\theta'}}, \quad (48)$$

$$V(r) = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{\sin\theta' d\theta'}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos\theta'}}. \quad (49)$$

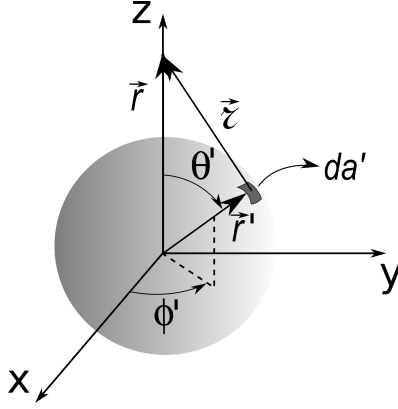


Figura 4: Superfície esférica carregada com densidade $\sigma(\vec{r}')$ de cargas e os vetores de interesse.

Esta integral pode ser resolvida através da substituição $u = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta'$ com $du = 2Rr \sin \theta' d\theta'$, ou seja,

$$V(r) = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{2Rr} \int_{(R-r)^2}^{(R+r)^2} \frac{du}{\sqrt{u}}, \quad (50)$$

$$V(r) = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{2Rr} \left. \frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} \right|_{(R-r)^2}^{(R+r)^2}, \quad (51)$$

$$V(r) = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{Rr} (|R+r| - |R-r|). \quad (52)$$

Para $r < R$, $|R-r| = R-r$, então

$$V(r) = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} \frac{2r}{Rr}, \quad (53)$$

$$V(r) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}. \quad (54)$$

Para $r > R$, $|R-r| = r-R$, então

$$V(r) = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} \frac{2R}{Rr}, \quad (55)$$

$$V(r) = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r}. \quad (56)$$

Para $r = R$, $|R-r| = 0$ e $|R+r| = 2R$, então

$$V(r) = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} \frac{2R}{R^2}, \quad (57)$$

$$V(r) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}, \quad (58)$$

evidenciando que o potencial é sempre contínuo. De forma compacta, podemos escrever o potencial eletrostático neste caso como sendo

$$V(r) = \begin{cases} \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r}, & r \geq R \\ \frac{\sigma R}{\epsilon_0}, & r \leq R. \end{cases} \quad (59)$$

Graficamente, o potencial elétrico encontrado para a superfície carregada está apresentado na figura 5 a seguir.

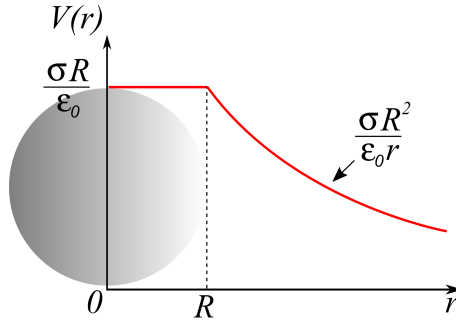


Figura 5: Gráfico para o potencial elétrico de uma superfície esférica carregada com densidade σ uniforme.

1.3 O divergente de \vec{E}

Vamos recordar dos cursos de eletromagnetismo básico a importante **lei de Gauss** para eletrostática. Esta lei garante que o fluxo do campo elétrico sobre qualquer superfície fechada S só depende da carga elétrica total encerrada por essa superfície, ou seja,

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}. \quad (60)$$

Se esta carga interna puder ser escrita como uma integral de alguma densidade ρ no volume \mathcal{V} encerrado por S , temos que

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho d\tau. \quad (61)$$

Por outro lado, o teorema da divergência nos garante que

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_{\mathcal{V}} (\nabla \cdot \vec{E}) d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho d\tau, \quad (62)$$

conduzindo ao seguinte resultado,

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}}. \quad (63)$$

Chamamos esta última equação de **forma diferencial** da lei de Gauss.

Podemos ir mais além se usarmos a equação 38, chegando a

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (64)$$

equação esta chamada de equação de Poisson¹. Em muitos problemas de interesse da física, recorre-se a idealizações de distribuições de cargas, isto é, distribuições lineares e superficiais. Tome como exemplo uma casca esférica onde toda carga está concentrada em uma superfície com $r = R$. Neste caso, para todos os outros pontos com $r \neq R$, temos $\rho = 0$, e a equação de Poisson se torna a equação de Laplace²

$$\nabla^2 V = 0. \quad (65)$$

Os problemas de eletrostática que se resumem na determinação de V e \vec{E} em todo espaço podem ser resolvidos via integração direta através das equações 6 e 45. Contudo, podemos abordar o problema através da equação de Laplace quando as condições de contorno do problema estão especificadas. Esse tópico do eletromagnetismo será abordado nos fascículos posteriores.

¹Siméon Denis Poisson, matemático francês (1781-1840)

²Pierre-Simon Laplace, matemático francês (1749-1827)

A função delta de Dirac

Em muitas situações na física estamos interessados em densidades que são extremamente localizadas, ou seja, uma certa quantidade **finita** concentrada em apenas um ponto, linha ou superfície, as chamadas distribuições singulares. No caso da carga pontual, apesar da carga q ser finita, a densidade de carga no ponto ocupado pela carga em si é **indeterminada** visto que o volume é zero. Isto poderia trazer sérios problemas para lei de Gauss (teorema da divergência) da seguinte forma:

- (I) Uma carga pontual q isolada e localizada na origem de um sistema cartesiano gera um campo elétrico radial (para $r \neq 0$) expresso por

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}. \quad (66)$$

Para $r = 0$, o campo elétrico é indeterminado.

- (II) O teorema da divergência de Gauss garante que

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \vec{E} d\tau, \quad (67)$$

sendo \mathcal{S} sendo uma superfície fechada contorno de um volume \mathcal{V} . Escolhendo uma superfície esférica centrada na origem e de raio R , a integral do fluxo do lado esquerdo da equação anterior é igual a

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad (68)$$

resultado este já conhecido pela lei de Gauss na forma integral.

- (III) Calculando o lado direito da equação que apresenta o teorema da divergência, temos

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \cdot \frac{1}{r^2} \right) = 0, \quad (69)$$

para $r \neq 0$, implicando em

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \vec{E} d\tau = 0, \quad (70)$$

onde chegamos assim em uma inconsistência, pois as duas integrais, tanto a de volume como a de superfície deveriam ser iguais a q/ϵ_0 .

A inconsistência evidenciada anteriormente é simplesmente aparente, tendo em vista que não consideramos a indeterminação em $r = 0$ para o campo elétrico. Vamos tentar corrigir isso observando como fica a densidade de carga para uma carga pontual. Devido a idealização da carga pontual não permitir definir uma densidade no sentido usual, pois não podemos atribuir um volume a um ponto, temos que admitir algumas suposições. Admita que existe uma função, fora do sentido usual que conhecemos, para a densidade de carga $\rho(r)$ que possa representar uma carga pontual através de $q = \int_{\mathcal{V}} \rho(r) d\tau$ com q sendo uma quantidade **finita** de carga. Se a carga for finita, tomando um processo limite que reduza o volume ocupado pela carga a zero, a densidade tenderia ao infinito na localização da carga e seria nula para todos os demais pontos do espaço. Assumindo estas considerações, temos que

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \vec{E} d\tau = \frac{q}{\epsilon_0}, \quad (71)$$

$$\epsilon_0 \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \vec{E} d\tau = \int_{\mathcal{V}} \rho(r) d\tau, \quad (72)$$

$$q \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) d\tau = \int_{\mathcal{V}} \rho(r) d\tau, \quad (73)$$

sendo \mathcal{V} um volume fechado qualquer no espaço. Temos as seguintes constatações:

1. Se o volume \mathcal{V} **englobar** a carga pontual q , a integral $\int_{\mathcal{V}} \rho(r) d\tau$ deve ser igual a q visto que a carga total é finita, mesmo estado concentrada apenas em um ponto ($r = 0$).

2. Se o volume \mathcal{V} **não englobar** a carga pontual q , a integral $\int_{\mathcal{V}} \rho(r) d\tau$ deve ser **nula**, visto que não haverá nenhuma carga no volume considerado.

Estas duas constatações indicam que a integral

$$\int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) d\tau \quad (74)$$

deve ser igual a 4π , se o volume \mathcal{V} englobar a carga q , e zero, se o volume \mathcal{V} não englobar a carga q . Isso sugere um comportamento diferenciado do divergente de $\frac{\hat{r}}{r^2}$ e conseqüentemente da função densidade de carga $\rho(\vec{r})$ que estamos cogitando encontrar. Podemos resumir a constatação mencionada anteriormente da seguinte maneira,

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) d\tau = \begin{cases} 0, & \text{se } \mathcal{V} \text{ não contém } \vec{r} = 0 \\ 1, & \text{se } \mathcal{V} \text{ contém } \vec{r} = 0. \end{cases} \quad (75)$$

ou, definindo uma função $\delta(\vec{r})$ como sendo

$$\frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) \equiv \delta(\vec{r}), \quad (76)$$

temos que

$$\int_{\mathcal{V}} \delta(\vec{r}) d\tau = \begin{cases} 0, & \text{se } \mathcal{V} \text{ não contém } \vec{r} = 0 \\ 1, & \text{se } \mathcal{V} \text{ contém } \vec{r} = 0. \end{cases} \quad (77)$$

Note que a divergência da função acima não representa uma função no sentido usual, e é um preço que devemos pagar por concentrar uma quantidade finita de carga em um único ponto. Chamamos esta “função” de **delta de Dirac** $\delta(\vec{r})$, e ela representa uma concentração infinita de carga no ponto $\vec{r} = 0$ e sendo nula para todos os demais pontos do espaço ($\vec{r} \neq 0$). A delta de Dirac é representada através da expressão

$$\delta(\vec{r}) = \begin{cases} 0, & \vec{r} \neq 0 \\ \infty, & \vec{r} = 0. \end{cases}, \quad (78)$$

e o divergente em questão é escrito como

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2} \right) = 4\pi\delta(\vec{r}). \quad (79)$$

A partir destas considerações, poderíamos inferir que a densidade $\rho(\vec{r})$ que estávamos procurando para representar uma carga pontual não é feita através de uma função usual e seria dada por (a partir da equação 73)

$$\rho(\vec{r}) = q\delta(\vec{r}), \quad (80)$$

com

$$\int_{\mathcal{V}} \delta(\vec{r}) d\tau = \begin{cases} 0, & \text{se } \mathcal{V} \text{ não contém } \vec{r} = 0 \\ 1, & \text{se } \mathcal{V} \text{ contém } \vec{r} = 0. \end{cases} \quad (81)$$

A delta de Dirac é uma construção proveniente de um processo limite de uma seqüência de funções, como apresentado na **teoria das funções generalizadas** ou **teoria de distribuições**.

Fizemos nossa abordagem colocando a carga pontual q na origem do sistema de coordenadas. Mas o fato é que para qualquer posição \vec{r}' escolhida, a função delta de Dirac também assume a seguinte representação

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}') = \begin{cases} 0, & \vec{r} \neq \vec{r}' \\ \infty, & \vec{r} = \vec{r}', \end{cases} \quad (82)$$

ou, através do vetor separação $\vec{z} = \vec{r} - \vec{r}'$,

$$\delta(\vec{z}) = \begin{cases} 0, & \vec{z} \neq 0 \\ \infty, & \vec{z} = 0. \end{cases}, \quad (83)$$

o que implica que

$$\nabla \cdot \left(\frac{\hat{z}}{z^2} \right) = 4\pi\delta(\vec{z}). \quad (84)$$

Uma outra propriedade muito importante da função delta de Dirac é a propriedade de **filtrar** o valor de uma função (veja o complemento I). Filtro no sentido de que, se realizarmos a integral do produto de uma função $f(\vec{r}')$ por $\delta(\vec{r} - \vec{r}')$, o resultado é o valor da função f no ponto de localização da delta, ou seja, \vec{r} . Basta a integral ser feita em um volume que contenha \vec{r} , caso contrário, o resultado será nulo. Portanto,

$$\int_{\mathcal{V}} f(\vec{r}')\delta(\vec{r} - \vec{r}')d\tau' = f(\vec{r}), \quad (85)$$

com \mathcal{V} englobando a posição em \vec{r} . Dessa forma, podemos obter a divergência de \vec{E} diretamente a partir da equação 6. Com efeito,

$$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\rho(\vec{r}')d\tau'}{z^2} \hat{z} \right]. \quad (86)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}')d\tau' \left[\nabla \cdot \left(\frac{\hat{z}}{z^2} \right) \right], \quad (87)$$

e usando as equações 84 e 85 temos

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{4\pi}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}')\delta(\vec{r} - \vec{r}')d\tau', \quad (88)$$

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}}. \quad (89)$$

2 Condições de contorno na eletrostática

A equação de Laplace quando resolvida fornece uma **solução geral** para o potencial elétrico nos diferentes conjuntos de coordenadas ortogonais, ou seja, cartesianas, cilíndricas e esféricas. A partir da solução geral, podemos encontrar uma **solução particular** para um problema específico, tendo conhecimento de suas **condições de contorno**. Vamos obter aqui, algumas condições para o potencial e para o campo elétrico que devem ser satisfeitas em interfaces com densidade superficial de carga.

Considere uma interface com densidade superficial σ de carga. Vamos definir os vetores \vec{E}_{acima} e \vec{E}_{abaixo} representando os campos elétricos imediatamente acima e abaixo da interface, respectivamente. Vamos escolher uma superfície Gaussiana em formato de um paralelepípedo de área da base A e altura ϵ , com a metade de seu volume acima da interface e a outra metade abaixo da interface, e aplicar a lei de Gauss neste caso. Considere que a altura é extremamente pequena comparada com as dimensões da área da base, e que a área da base é pequena suficiente para que não ocorra mudança da densidade de carga σ na área tomada, justificando a aproximação de que a carga seja distribuída uniformemente na área A . Veja a figura 6 a seguir.

Aplicando a lei de Gauss, no limite de $\epsilon \rightarrow 0$, temos que

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}, \quad (90)$$

$$\vec{E}_{acima} \cdot \vec{A} - \vec{E}_{abaixo} \cdot \vec{A} = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}, \quad (91)$$

$$\vec{E}_{acima} \cdot \hat{n}A - \vec{E}_{abaixo} \cdot \hat{n}A = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}, \quad (92)$$

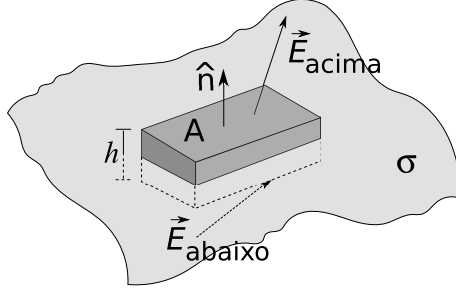


Figura 6: Interface com densidade superficial de carga σ . Uma superfície Gaussiana foi escolhida em formato de paralelepípedo de área A de base ε . Os vetores \vec{E}_{acima} e \vec{E}_{abaixo} representam os campos elétricos imediatamente acima e abaixo da interface, respectivamente. O versor \hat{n} é o vetor unitário perpendicular à superfície de área A .

$$\boxed{E_{acima}^{\perp} - E_{abaixo}^{\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}}, \quad (93)$$

onde usamos a notação $E^{\perp} = \vec{E} \cdot \hat{n}$ para denotar a componente normal do campo elétrico. A equação anterior determina que a existência de cargas em interfaces gera o que chamamos de **descontinuidade** da componente normal do campo elétrico. Em termos do potencial elétrico, temos que $-\nabla V = \vec{E}$, portanto, $\vec{E} \cdot \hat{n} = -\nabla V \cdot \hat{n} = -\frac{\partial V}{\partial n}$. Sendo assim, a equação 93 se torna

$$\frac{\partial V}{\partial n} \Big|_{acima} - \frac{\partial V}{\partial n} \Big|_{abaixo} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (94)$$

Considere agora, uma curva fechada C em formato retangular de altura ε e comprimento L , com a metade do retângulo acima da interface e a outra metade abaixo da interface, como ilustra a figura 7 a seguir. A circulação do campo elétrico para este caminho e por qualquer outro é nula, tendo em vista a equação fundamental da eletrostática $\nabla \times \vec{E} = 0$.

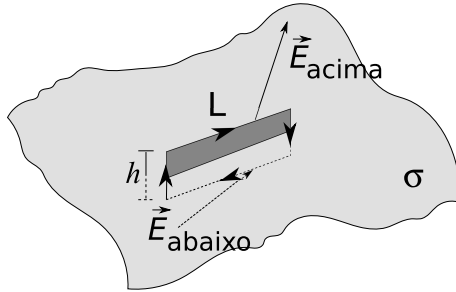


Figura 7: Interface com densidade superficial de carga σ . Uma curva fechada foi escolhida em formato retangular de comprimento L de base e altura ε . Os vetores \vec{E}_{acima} e \vec{E}_{abaixo} representam os campos elétricos imediatamente acima e abaixo da interface, respectivamente.

Sendo assim, no limite de $\epsilon \rightarrow 0$ somente o produto escalar de \vec{E} com os seguimentos acima e abaixo do retângulo contribuem para a integração. Portanto,

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0, \quad (95)$$

$$\vec{E}_{acima} \cdot \vec{L} - \vec{E}_{abaixo} \cdot \vec{L} = 0, \quad (96)$$

$$\vec{E}_{acima} \cdot \hat{l} - \vec{E}_{abaixo} \cdot \hat{l} = 0, \quad (97)$$

$$E_{acima}^{\parallel} = E_{abaixo}^{\parallel}. \quad (98)$$

onde usamos a notação $E^{\parallel} = \vec{E} \cdot \hat{l}$ para denotar a componente tangencial do campo elétrico ao longo da interface com \hat{l} sendo o versor tangente à superfície. Esta última equação mostra que não há mudança da componente tangencial do campo elétrico através da interface. Desta forma, a componente tangencial do campo elétrico é **contínua** através das interfaces.

Uma outra condição de contorno muito importante para eletrostática é que o potencial elétrico é uma função contínua através das interfaces. Portanto, no limite de proximidades das interfaces, temos que o potencial imediatamente acima e imediatamente abaixo adquirem o mesmo valor, ou seja,

$$\boxed{V_{acima} = V_{abaixo}}. \quad (99)$$

As equações 93, 98 e 99 representam o conjunto de condições de contorno da eletrostática, de tal forma que os problemas que envolvam a determinação do potencial via equação de Laplace

$$\nabla^2 V = 0, \quad (100)$$

devem obedecer estas condições nas interfaces.

Exemplo 3. Considere uma camada esférica muito fina de raio R com densidade superficial de carga σ . Mostre que a condição de contorno 93 é obedecida para este caso.

Solução: Através da lei de Gauss, é fácil mostrar que os campos elétricos numa posição r fora (acima) e dentro (abaixo) da esfera (interface) são dados por

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2} \hat{r}, & r > R \\ 0, & r < R. \end{cases} \quad (101)$$

Portanto, no limite $r \rightarrow R$, temos que $E_{acima}^{\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ e $E_{abaixo}^{\perp} = 0$, o que conduz a

$$E_{acima}^{\perp} - E_{abaixo}^{\perp}, \quad (102)$$

$$\frac{\sigma}{\epsilon_0} - 0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (103)$$

o que verifica a condição de contorno citada.

Estudamos anteriormente as condições de contorno para o campo elétrico com valores **imediatamente** acima e abaixo de interfaces com distribuições superficiais de cargas. Surge naturalmente o seguinte questionamento: qual deve ser o campo elétrico **sobre** a interface?

Para responder este questionamento, vale lembrar algo muito importante: uma carga não realiza força elétrica sobre si mesma. Logo, se estamos tratando do campo elétrico em um determinado ponto sobre uma superfície de carga, a carga neste ponto não contribui para este campo elétrico, da mesma forma que o campo elétrico devido uma distribuição discreta de cargas sobre uma certa carga q , não leva em conta o campo elétrico devido a esta carga q , mas sim o campo elétrico devido as demais cargas da distribuição.

Para contornar este problema em uma distribuição superficial, considere uma distribuição superficial de carga σ e que fracionamos o campo elétrico em um ponto sobre a superfície como sendo atribuído a duas fontes. Sendo elas: um disco pequeno em torno do ponto e as demais cargas da distribuição superficial. Chamaremos o campo elétrico devido ao disco no ponto sobre a superfície de \vec{E}_{disco} , que já sabemos pela lei de Gauss que tem módulo $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ imediatamente acima ou abaixo da superfície. Chamaremos o campo elétrico devido às demais cargas de \vec{E}_{demais} . Veja a figura 8 a seguir.

A diferença básica entre esses campos é que o campo elétrico devido ao disco é **descontínuo**, visto que possui uma densidade de carga, como visto na equação 93, ao passo que é **contínuo** para o campo elétrico devido às demais cargas da superfície, visto que o espaço deixado pelo disco não possui carga. Dessa forma, podemos escrever que, o campo elétrico imediatamente acima da interface é dado por

$$\vec{E}_{acima} = \vec{E}_{demais} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n}, \quad (104)$$

ao passo que imediatamente abaixo da superfície, o campo elétrico é dado por

$$\vec{E}_{abaixo} = \vec{E}_{demais} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n}. \quad (105)$$

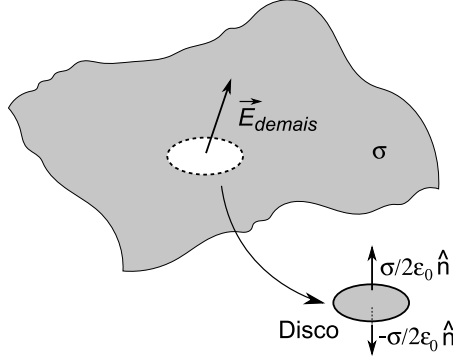


Figura 8: Campos elétricos sobre uma interface de densidade superficial de carga σ . Para retirarmos a contribuição do campo elétrico devido a carga sobre o ponto de interesse, separamos as contribuições devido o disco e devido às demais cargas.

Usamos o mesmo valor \vec{E}_{demais} para ambas as expressões acima devido ao fato dele ser contínuo através da interface. Somando as duas equações anteriores é fácil mostrar que o campo elétrico sobre a superfície devido as demais cargas, excetuando-se assim a carga sobre o ponto de interesse, é dado por

$$\vec{E}_{demais} = \frac{1}{2} \left[\vec{E}_{acima} + \vec{E}_{abaixo} \right], \quad (106)$$

sendo portanto dado pela média aritmética entre os valores do campo elétrico imediatamente acima e abaixo da interface.

Exemplo 4. Usando a equação 106, mostre que o campo elétrico *sobre* a superfície da casca esférica de densidade superficial uniforme σ é dado por

$$\vec{E}(r = R) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{r}. \quad (107)$$

Mostre o mesmo resultado pela lei de Coulomb.

Solução: Usando a equação 106, é trivial que

$$\vec{E}(R) = \frac{1}{2} \left[\vec{E}_{acima} + \vec{E}_{abaixo} \right], \quad (108)$$

$$\vec{E}(R) = \frac{1}{2} \left[\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{r} + 0 \right], \quad (109)$$

$$\vec{E}(R) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{r}. \quad (110)$$

Usando a lei de Coulomb, vamos considerar a mesma geometria adotada na aula anterior para o cálculo do potencial elétrico devido uma casca esférica de densidade superficial de cargas σ , como apresentado na figura 4. Sem perdas de generalidade (simetria esférica), podemos fazer o vetor posição \vec{r} apontar da direção z , de tal forma que $\vec{r} = z\hat{z}$. A localização do elemento de carga $dq' = \sigma R^2 \sin \theta' d\theta' d\phi'$ é dada pelo vetor $\vec{r}' = R[\sin \theta' \cos \phi' \hat{x} + \sin \theta' \sin \phi' \hat{y} + \cos \theta' \hat{z}]$ e o vetor posição $\vec{z} = \vec{r} - \vec{r}' = -R \sin \theta' \cos \phi' \hat{x} - R \sin \theta' \sin \phi' \hat{y} + (z - R \cos \theta') \hat{z}$ em relação ao elemento de carga tem módulo dado pela lei dos cossenos $z = \sqrt{R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta'}$. Sendo assim, a integral para o campo elétrico é dada por

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\vec{r}') da'}{z^2} \hat{z}, \quad (111)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\vec{r}') da'}{z^3} \vec{z}, \quad (112)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sigma R^2 \sin \theta' d\theta' d\phi' [-R \sin \theta' \cos \phi' \hat{x} - R \sin \theta' \sin \phi' \hat{y} + (z - R \cos \theta') \hat{z}]}{(R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta')^{3/2}}. \quad (113)$$

Perceba que as componentes nas direções \hat{x} e \hat{y} se anulam, visto que $\int_0^{2\pi} \cos \phi' d\phi' = \int_0^{2\pi} \sin \phi' d\phi' = 0$, restando apenas a componente na direção \hat{z} , de tal forma que

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{\sin \theta' d\theta' (z - R \cos \theta') \hat{z}}{(R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta')^{3/2}}. \quad (114)$$

A integral em θ' pode ser resolvida por substituição, fazendo $u = R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta'$. Deixamos para o leitor mostrar que

$$\int_0^\pi \frac{\sin \theta' d\theta' (z - R \cos \theta')}{(R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta')^{3/2}} = \frac{1}{2Rz^2} \left[(R^2 - z^2) \left(\frac{1}{|R+z|} - \frac{1}{|R-z|} \right) + (|R+z| - |R-z|) \right]. \quad (115)$$

Para o caso que $z > R$ (fora da casca esférica ou acima da interface), $|R+z| = R+z$ e $|R-z| = z-R$. Portanto,

$$\int_0^\pi \frac{\sin \theta' d\theta' (z - R \cos \theta')}{(R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta')^{3/2}} = \frac{2}{z^2}, \quad (116)$$

o que resulta em um campo elétrico dado por

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} \frac{2}{z^2} \hat{z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z^2} \hat{z}, \quad (117)$$

sendo este um resultado esperado para o campo elétrico fora da casca esférica com Q sendo sua carga total.

Para o caso que $z < R$ (dentro da casca esférica ou abaixo da interface), $|R+z| = R+z$ e $|R-z| = R-z$. Portanto,

$$\int_0^\pi \frac{\sin \theta' d\theta' (z - R \cos \theta')}{(R^2 + z^2 - 2Rz \cos \theta')^{3/2}} = 0, \quad (118)$$

o que resulta em um campo elétrico **nulo** no interior da casca esférica, sendo este também um resultado esperado.

Contudo, para $z = R$, ou seja, para o ponto **sobre** a casca esférica, a integral apresenta uma indeterminação na divisão $\frac{1}{|R-z|}$, visto que nossa integração levou em conta **toda** distribuição de carga, inclusive a carga posicionada sobre o ponto com $z = R$ que, como bem sabemos, gera uma indeterminação não contribuindo com campo elétrico sobre si mesmo. Vamos contornar essa indeterminação, excluindo a carga localizada em $\theta = 0$ ($z = R$), definindo um ângulo θ_0 e depois tomando o limite $\theta_0 \rightarrow 0$ (veja a figura 9 a seguir).

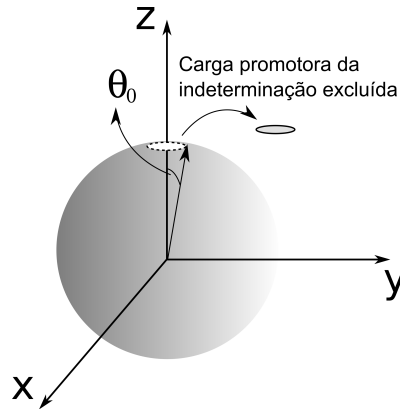


Figura 9: Superfície esférica carregada com densidade σ de cargas e a retirada da carga promotora da indeterminação usando o ângulo polar θ_0 .

A integral na equação 113 para $z = R$ e com os novos limites ($\theta_0 \leq \theta' \leq \pi$) é dada por

$$\int_{\theta_0}^\pi \frac{\sin \theta' d\theta' (R - R \cos \theta')}{(R^2 + R^2 - 2R^2 \cos \theta')^{3/2}}, \quad (119)$$

$$\frac{1}{2^{3/2}R^2} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\sin \theta' d\theta'}{(1 - \cos \theta')^{1/2}}. \quad (120)$$

Fazendo $u = 1 - \cos \theta'$, temos que a integral fica

$$\frac{1}{2^{3/2}R^2} \frac{u^{-1/2+1}}{-1/2+1} \Big|_{u(\theta_0)}^2, \quad (121)$$

$$\frac{2}{2^{3/2}R^2} u^{1/2} \Big|_{u(\theta_0)}, \quad (122)$$

$$\frac{2}{2^{3/2}R^2} [2^{1/2} - (1 - \cos \theta_0)^{1/2}], \quad (123)$$

onde tomamos o limite $\theta_0 \rightarrow 0$ para mostrar que a integral na equação 113 para $z = R$, excluindo a indeterminação causada pela carga neste ponto, resulta em

$$\frac{1}{2^{3/2}R^2} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{\sin \theta' d\theta'}{(1 - \cos \theta')^{1/2}} = \frac{1}{R^2}. \quad (124)$$

Sendo assim, o campo sobre a superfície carregada é dado por

$$\vec{E}(R) = \frac{\sigma R^2}{2\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \hat{z} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z}, \quad (125)$$

como queríamos demonstrar e compatível com a média calculada anteriormente.

Nos limites das proximidades da esfera, em seu interior, o campo elétrico pode ser examinado através do princípio da superposição como sendo a soma do valor limite $\sigma/2\epsilon_0$ com o campo devido ao disco de $-\sigma/2\epsilon_0$, sendo nulo no interior do condutor, como esperado. Nos limites das proximidades da esfera, em seu exterior, usando novamente o princípio da superposição, chegamos à soma do valor limite $\sigma/2\epsilon_0$ com o campo devido ao disco de $\sigma/2\epsilon_0$, sendo igual a σ/ϵ_0 imediatamente no exterior da esfera condutora (veja a figura a seguir).

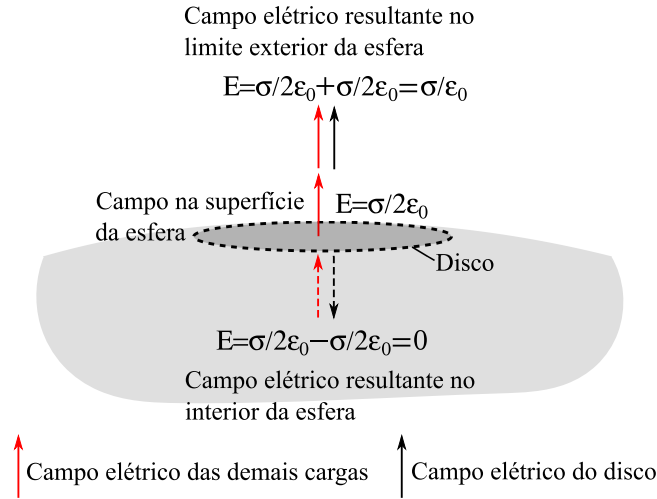


Figura 10: Exame da resultante do campo elétrico nos limites de proximidade da superfície esférica com densidade de carga uniforme σ . No limite de proximidade na região exterior da esfera, a resultante para o campo elétrico é a soma dos campos devido às demais cargas $\sigma/2\epsilon_0$ e do campo $\sigma/2\epsilon_0$ do disco promotor da indeterminação, resultando em σ/ϵ_0 , como já mostrado anteriormente. No limite de proximidade na região interior da esfera, a resultante para o campo elétrico é nula, pois é resultado da soma de $\sigma/2\epsilon_0$ devido às demais cargas com o campo $-\sigma/2\epsilon_0$ devido ao disco, como também é esperado. Sobre a superfície, temos apenas o campo elétrico devido às demais cargas, ou seja, $\sigma/2\epsilon_0$.

Graficamente, o campo elétrico encontrado como função de r , para a superfície carregada com densidade uniforme σ , está apresentado na figura 5 a seguir.

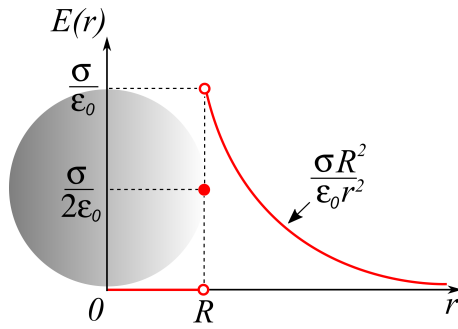


Figura 11: Gráfico para o campo elétrico como função de r devido uma superfície esférica carregada com densidade σ uniforme.

Vale aqui alguns comentários sobre o que este resultado implica para a equação $\vec{E} = -\nabla V$. Como vimos na equação 93, a lei de Gauss determina que o campo elétrico deve sofrer descontinuidades em interfaces e, desta forma, a equação $\vec{E} = -\nabla V$ só se aplica em pontos em que o potencial é uma função diferenciável, sendo portanto **insuficiente** para determinação do campo elétrico sobre uma interface. Dito de outra forma, a não diferenciabilidade do potencial elétrico em um ponto não implica na indeterminação do campo elétrico, mas sim na insuficiência da equação $\vec{E} = -\nabla V$ para determinar o campo elétrico neste caso. Recorremos às outras técnicas como, por exemplo, a lei de Coulomb, como feito no exemplo anterior.