

IFRN - Campus Natal/Central - Licenciatura em Física

Prof. Tibério Alves, D. Sc.

Eletromagnetismo Clássico I - 2019.2

Fascículo II - Trabalho e energia potencial em eletrostática

6 de setembro de 2019

Resumo

Neste fascículo, vamos estudar o trabalho e energia potencial em eletrostática. Iremos também expor os conceitos e propriedades referentes aos condutores. Faremos uma abordagem de suas propriedades básicas, o conceito de cargas induzidas, carga superficial e pressão eletrostática. Definiremos também a capacitância de um capacitor e aplicaremos esta definição para o capacitor esférico. No fim, iremos abordar a generalização do conceito de capacitância através dos conceitos de coeficientes do potencial, de capacitância e de indução.

1 Trabalho e energia potencial em eletrostática

Uma configuração qualquer de cargas elétricas, seja ela discreta ou contínua, se efetivou mediante a realização de algum **trabalho**. Por exemplo, para colocarmos duas cargas pontuais q_1 e q_2 nas posições \vec{r}_1 e \vec{r}_2 no espaço, distantes $\vec{z}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ entre si, após fixar q_1 na posição \vec{r}_1 , algum agente externo deve ter realizado trabalho sobre a segunda carga q_2 **contra** a força elétrica para levá-la até a posição \vec{r}_2 .

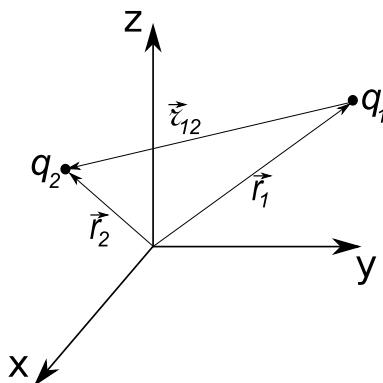


Figura 1: Cargas pontuais q_1 e q_2 nas posições \vec{r}_1 e \vec{r}_2 com $\vec{z}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

Para calcularmos o mínimo trabalho realizado para montar esta configuração de cargas, devemos trazer a carga q_2 de uma distância suficientemente grande (infinito), onde a interação entre as cargas seja desprezível, até repousa-la em \vec{r}_2 . O trabalho W realizado contra a força elétrica devido a carga q_1 sobre a carga q_2 é dado por (por um caminho qualquer)

$$W = - \int_{\infty}^{\vec{r}_2} \vec{F}_{12} \cdot d\vec{l}, \quad (1)$$

$$W = -q_2 \int_{\infty}^{\vec{r}_2} \vec{E}_{12} \cdot d\vec{l}, \quad (2)$$

$$W = q_2[V_1(\vec{r}_2) - V_1(\infty)], \quad (3)$$

onde \vec{E}_{12} e V_1 são o campo e o potencial elétrico, respectivamente, devido a carga q_1 sobre a carga q_2 . Se considerarmos o infinito como referência para o potencial elétrico, temos que $V_1(\infty) = 0$, e o trabalho para gerar a configuração citada é dado agora por,

$$W = q_2V_1(\vec{r}_2), \quad (4)$$

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2q_1}{z_{12}}. \quad (5)$$

Note que se tivéssemos feito o mesmo procedimento, só que com a carga q_1 teríamos exatamente o mesmo resultado. Basta trocarmos os índices na expressão anterior ficando com

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_2}{z_{21}}. \quad (6)$$

A equação 4 indica que para colocar uma carga q_2 (na presença de q_1) numa posição \vec{r}_2 , demandou-se um trabalho igual a $W = q_2V_1(\vec{r}_2)$. Portanto, podemos generalizar que para uma carga q esteja numa posição \vec{r} , um trabalho igual a $W = qV(\vec{r})$ foi necessário, com $V(\vec{r})$ sendo o potencial elétrico na posição \vec{r} . Definimos então, neste caso, de **energia potencial**, o trabalho mínimo necessário para que a configuração pretendida de posição das cargas seja alcançada. Neste sentido, o potencial elétrico pode ser visto como a razão da energia potencial por quantidade de carga, ou seja,

$$V(\vec{r}) = \frac{W}{q}. \quad (7)$$

Continuando com a abordagem sobre a configuração anteriormente mencionada, se quisermos adicionar uma nova carga q_3 à configuração de carga numa posição \vec{r}_3 , teremos o trabalho contra o campo elétrico da carga q_1 sobre q_3 bem como o campo elétrico da carga q_2 sobre q_3 , resultando na seguinte expressão,

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_2}{z_{21}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_3}{z_{31}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_3q_2}{z_{23}}. \quad (8)$$

Para uma generalização com N cargas, teríamos a soma

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{j>i}^N \frac{q_iq_j}{z_{ij}}, \quad (9)$$

com o segundo somatório tendo $j > i$ para evitarmos somar duas vezes a mesma quantidade. Ou poderíamos permitir a soma dupla e usarmos um fator $1/2$ para compensar, ou seja,

$$W = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1(j\neq i)}^N \frac{q_iq_j}{z_{ij}}. \quad (10)$$

Note que podemos escrever também que

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \left(\sum_{j=1(j\neq i)}^N \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{z_{ij}} \right). \quad (11)$$

Nesta última equação, podemos identificar o somatório entre parênteses como sendo o potencial elétrico na posição \vec{r}_i devido ao do conjunto de cargas, excetuando-se a i -ésima carga ($j \neq i$), isto é,

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i V(\vec{r}_i), \quad (12)$$

representando assim, a energia potencial de uma configuração discreta de cargas.

1.1 Distribuições contínuas de cargas

A equação 12 representa a energia potencial de uma configuração discreta de cargas. Usando o cálculo diferencial e integral, podemos generalizar este resultado para uma distribuição **contínua** de cargas substituindo o somatório por uma integração, isto é,

$$W = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \rho V d\tau, \quad (13)$$

sendo \mathcal{V} o volume que compreende a distribuição volumétrica de densidade ρ . Para distribuições superficiais e lineares de carga, temos, respectivamente,

$$W = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}} \sigma V da, \quad (14)$$

$$W = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{C}} \lambda V dl. \quad (15)$$

Um conceito interessante sobre a energia potencial eletrostática surge quando usamos a equação fundamental da eletrostática para o campo elétrico $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ na equação 13. Fazendo isto, a integral da energia fica da seguinte maneira,

$$W = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \epsilon_0 (\nabla \cdot \vec{E}) V d\tau. \quad (16)$$

Vamos usar a regra do produto $\nabla \cdot (\vec{E}V) = (\nabla \cdot \vec{E})V + \vec{E} \cdot \nabla V$ na integral, obtendo

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathcal{V}} \nabla \cdot (\vec{E}V) d\tau - \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathcal{V}} \vec{E} \cdot \nabla V d\tau. \quad (17)$$

Na primeira integral, podemos aplicar o teorema da divergência de Gauss e, na segunda integral, podemos usar $\nabla V = -\vec{E}$, obtendo,

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \oint_{\mathcal{S}} V \vec{E} \cdot d\vec{a} + \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathcal{V}} \vec{E} \cdot \vec{E} d\tau, \quad (18)$$

sendo \mathcal{S} a superfície que contorna o volume \mathcal{V} que contém a distribuição volumétrica de carga. Esta nova abordagem permite escolhermos qualquer superfície \mathcal{S} , desde que englobe toda a distribuição de carga. Se escolhermos uma superfície esférica de raio R e tomarmos o limite de $R \rightarrow \infty$, o potencial elétrico $V(\infty)$ se anula devido a referência que adotamos. Logo, a energia potencial seria dada apenas pela segunda integral, visto que o integrando da primeira seria nulo. Ou seja,

$$W = \int_{\mathcal{V}} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} d\tau, \quad (19)$$

com a integral no volume \mathcal{V} varrendo **todo espaço**.

A equação 19 para a energia potencial traz um novo significado para energia de uma configuração de cargas elétricas. A integral citada pode ser vista como sendo uma integração de uma função **densidade de energia** u_e , de tal maneira que

$$W = \int_{\mathcal{V}} u_e d\tau, \quad (20)$$

com $u_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$. Sendo assim, a energia de uma configuração de cargas pode ser calculada através de seu campo elétrico em todo espaço, inferindo assim que a energia da configuração está atrelada ao campo elétrico que esta configuração de cargas gera em todo espaço.

Exemplo 1. Determine a energia de uma distribuição superficial esférica de carga de densidade σ e raio R . Mostre através das expressões 14 e 19.

Solução: O potencial elétrico na superfície é dado por $\sigma R/\epsilon_0$. Aplicando na equação 14, temos que

$$W = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{S}} \sigma V da, \quad (21)$$

$$W = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sigma^2 R^3}{\epsilon_0} \sin \theta d\theta d\phi, \quad (22)$$

$$W = \frac{2\pi\sigma^2 R^3}{\epsilon_0}. \quad (23)$$

Usando agora a equação 19, vamos notar primeiro que o módulo quadrado do campo elétrico dentro e fora da superfície esférica é dado por

$$E^2 = \begin{cases} 0, & r < R \\ \frac{\sigma^2 R^4}{\epsilon_0^2} \frac{1}{r^4}, & r > R. \end{cases} \quad (24)$$

Integrando sobre todo espaço, temos que

$$W = \int_{\mathcal{V}} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} d\tau, \quad (25)$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R (\theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi + \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_R^\infty \frac{\sigma^2 R^4}{\epsilon_0^2} \frac{1}{r^4} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi, \quad (26)$$

$$W = \frac{4\pi\epsilon_0}{2} \frac{\sigma^2 R^4}{\epsilon_0^2} \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr, \quad (27)$$

$$W = \frac{2\pi\sigma^2 R^4}{\epsilon_0} \frac{r^{-2+1}}{-2+1} \Big|_R^\infty, \quad (28)$$

$$W = \frac{2\pi\sigma^2 R^4}{\epsilon_0} \frac{1}{R}, \quad (29)$$

$$W = \frac{2\pi\sigma^2 R^3}{\epsilon_0}. \quad (30)$$

2 Condutores

Em **isolantes**, a força de ligação entre os elétrons e núcleos atômicos mantêm os elétrons fortemente ligados, não permitindo, sob moderado regime de intensidade de campo elétrico, a condução dos elétrons através do material. Esse comportamento é diferente em **condutores**, que possui um certo conjunto de elétrons, que estão fracamente ligados aos átomos, permitindo que estes possam ser conduzidos através do material. Chamamos estes elétrons de **elétrons livres**¹. O equilíbrio eletrostático de um condutor é atingido quando a condução destes elétrons livres cessa, após uma aplicação de campo elétrico externo, chegando assim a uma configuração estática de distribuição de carga. Neste contexto de equilíbrio, os condutores possuem algumas propriedades importantes do ponto de vista físico, estando elas listadas a seguir.

2.1 Propriedades básicas

- (i) $\vec{E} = 0$ dentro de um condutor. Do contrário as cargas livres sofreriam ação de uma força elétrica e o condutor não estaria em equilíbrio eletrostático.
- (ii) $\rho = 0$ dentro do condutor. Consequência de $\vec{E} = 0$ juntamente com $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$.
- (iii) A carga em um condutor deve ser superficial. Consequência da constatação anterior.
- (iv) A superfície de um condutor é uma equipotencial. Se houvesse diferença de potencial na superfície, haveria corrente elétrica, contrariando a condição de equilíbrio eletrostático.

¹Cabe a teoria de bandas da física do estado sólido, através das leis da mecânica quântica, a explicação do surgimento de elétrons livres nos metais.

- (v) \vec{E} é perpendicular à superfície imediatamente fora de um condutor (ver figura 2(a)). Se houvesse componente normal, a integral

$$V(\vec{b}) - V(\vec{a}) = - \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (31)$$

em algum caminho na superfície do condutor seria diferente de zero.

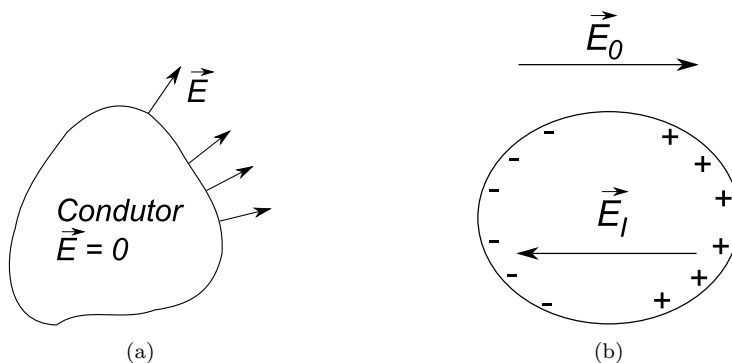


Figura 2: Condutores em equilíbrio eletrostático. Em (a) temos uma representação do campo elétrico normal à superfície do condutor em equilíbrio eletrostático. Em (b), temos uma representação de cargas induzidas superficiais gerando um campo elétrico \vec{E}_I no interior do condutor que tende a cancelar o campo indutor \vec{E}_0 , fazendo com que o campo elétrico seja nulo no interior do condutor.

2.2 Cargas induzidas

Um condutor na presença de um campo elétrico sofre indução de cargas. Estas cargas induzidas se configuram de tal modo que geram um campo elétrico \vec{E}_I que cancela o campo indutor no interior do condutor (ver figura 2(b)). Esse processo é chamado de **blindagem eletrostática** o que deu origem à gaiola de Faraday.

A equação para descontinuidade da componente normal do campo elétrico através de uma interface com densidade σ de carga é dada por

$$E_{acima}^\perp - E_{abaixo}^\perp = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (32)$$

No caso de condutores em equilíbrio eletrostático, o campo elétrico acima da superfície (interface) fora do condutor só possui componente normal, tendo em vista as propriedades já listadas anteriormente. Abaixo da superfície do condutor, ou seja, em seu interior, o campo elétrico é nulo. Portanto, podemos afirmar que

$$\vec{E}_{acima} - 0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}, \quad (33)$$

$$\vec{E}_{acima} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}. \quad (34)$$

Ou seja, para um condutor em equilíbrio eletrostático, o campo elétrico externo imediatamente acima de sua superfície será normal de intensidade σ/ϵ_0 . Em termos do potencial elétrico, usando $\vec{E} = -\nabla V$, temos que

$$- \left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_{acima} \hat{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}, \quad (35)$$

o que nos permite escrever que a densidade superficial no condutor será

$$\sigma = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial V}{\partial n} \right|_{acima}. \quad (36)$$

Esta equação será muito útil no estudo de condutores imersos em campos elétricos no regime eletrostático, como veremos nos próximos fascículos.

2.3 Pressão eletrostática

Como vimos no fascículo passado, o campo elétrico **sobre** uma superfície com densidade σ de carga é dado pela média dos campos elétricos imediatamente acima e abaixo da superfície que contém a carga, ou seja, o campo elétrico sobre a interface de cargas é dado por

$$\frac{1}{2} [\vec{E}_{acima} + \vec{E}_{abaixo}]. \quad (37)$$

Se tratando de um condutor fechado, acima da superfície do condutor temos a região externa e abaixo da superfície temos a região interna. Já vimos que campo elétrico imediatamente acima da superfície do condutor é normal e de intensidade dada por $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$. No interior do condutor em equilíbrio eletrostático, o campo elétrico é nulo. Desta forma, aplicando a equação 37, o campo elétrico sobre a superfície de um condutor é dado por

$$\frac{1}{2} \left[\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n} + \vec{E}_{abaixo} \right], \quad (38)$$

$$\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n}. \quad (39)$$

Este é o campo sofrido por um elemento de carga na superfície de um condutor. Se multiplicarmos a intensidade deste campo elétrico pela densidade de carga σ , teremos a força eletrostática por unidade de área \vec{f} sobre a superfície do condutor, dada por

$$\vec{f} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \hat{n} \quad (40)$$

cuja sua intensidade chamamos de **pressão eletrostática** P , dada por

$$P = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}. \quad (41)$$

Exemplo 2. Determine a força eletrostática que sofre o hemisfério superior de uma casca esférica condutora de raio R e densidade superficial de carga uniforme σ devida ao hemisfério inferior (veja a figura 3 a seguir).

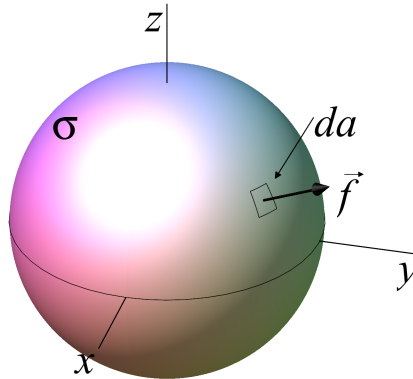


Figura 3: Superfície esférica com densidade superficial σ de carga. O elemento de área é $da = R^2 \sin \theta d\theta d\phi$ e o vetor preto sobre a superfície indica a força eletrostática por unidade de carga \vec{f} .

Solução: No caso de uma superfície esférica, o versor normal \hat{n} se torna o versor radial \hat{r} . Dessa forma, a força eletrostática por unidade de área \vec{f} sobre a superfície do condutor esférico, é dada por

$$\vec{f} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \hat{r}. \quad (42)$$

Para calcularmos a força sobre o hemisfério superior, basta integrarmos a força por unidade de área sobre a área do hemisfério superior, ou seja, sobre os limites $0 \leq \theta \leq \pi/2$ e $0 \leq \phi \leq 2\pi$. O versor radial escrito

em termos dos ângulos esféricos θ e ϕ fica expresso por $\hat{r} = \sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}$. Desta forma, a força total \vec{F} sobre o hemisfério superior é dada pela seguinte integral,

$$\vec{F} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} da \hat{r}, \quad (43)$$

$$\vec{F} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} [\sin \theta \cos \phi \hat{x} + \sin \theta \sin \phi \hat{y} + \cos \theta \hat{z}] R^2 \sin \theta d\theta d\phi. \quad (44)$$

Note que as integrais nas componentes das direções \hat{x} e \hat{y} se anulam, visto que $\int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi = \int_0^{2\pi} \sin \phi d\phi = 0$, sobrando apenas uma componente na direção \hat{z} expressa por

$$\vec{F} = \frac{\sigma^2 R^2}{2\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta \hat{z}, \quad (45)$$

$$\vec{F} = \frac{\sigma^2 R^2}{2\epsilon_0} 2\pi \frac{\sin^2 \theta}{2} \Big|_0^{\pi/2} \hat{z}, \quad (46)$$

$$\boxed{\vec{F} = \frac{\pi \sigma^2 R^2}{2\epsilon_0} \hat{z}}. \quad (47)$$

3 Capacitores

Suponha que dois condutores, inicialmente descarregados, são postos sob ação de um gerador que consegue carregá-los com carga de módulo Q , porém de sinais opostos, submetidos a uma diferença de potencial $\Delta V \equiv V_+ - V_-$, sendo V_+ o potencial elétrico na superfície do condutor com carga positiva e V_- o potencial elétrico na superfície do condutor com carga negativa, como indica a figura 4 a seguir.

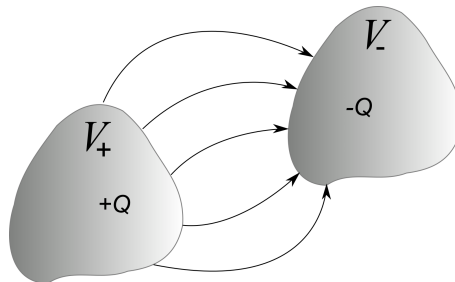


Figura 4: Condutores carregados com carga Q de sinais opostos.

Definimos a constante de proporcionalidade

$$C \equiv \frac{Q}{\Delta V}, \quad (48)$$

como sendo a **capacitância** do conjunto. Sua unidade no SI é o Faraday, de tal forma que $1F = \frac{1C}{1V}$. A capacitância de um conjunto só depende de fatores geométricos. O valor de ΔV pode ser calculado através da integração

$$\Delta V = - \int_-^+ \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (49)$$

Exemplo 3. Determine a capacitância do capacitor esférico composto por duas esferas metálicas concêntricas de raios r_1 e r_2 com $r_2 > r_1$. Considere que uma carga $-Q$ está distribuída na superfície da esfera de raio r_1 e uma carga $+Q$ está distribuída na superfície da esfera de raio r_2 , como indica a figura 5 a seguir.

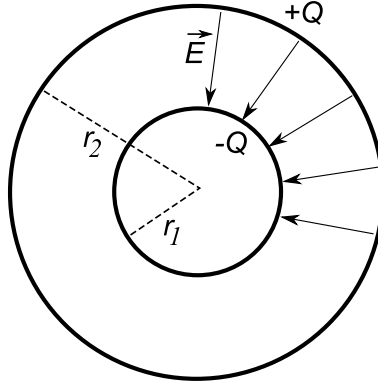


Figura 5: Vista seccional do capacitor esférico.

Solução: Primeiro, devemos determinar o campo elétrico na região entre os condutores. O campo elétrico, neste caso, possui simetria esférica, ou seja, $\vec{E} = E(r)\hat{r}$. Para uma superfície Gaussiana de raio r , com $r_1 < r < r_2$, concêntrica às esferas condutoras, a lei de Gauss permite escrever que

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}, \quad (50)$$

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{-Q}{\epsilon_0}, \quad (51)$$

$$E(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}, \quad (52)$$

$$\vec{E}(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}. \quad (53)$$

Segundo, devemos calcular a diferença de potencial $V = V_+ - V_-$, ou seja,

$$\Delta V = V_+ - V_- = - \int_-^+ \vec{E} \cdot d\vec{l}, \quad (54)$$

$$\Delta V = - \int_{r_1}^{r_2} \left(-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \right) \cdot dr \hat{r}, \quad (55)$$

$$\Delta V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2}, \quad (56)$$

$$\Delta V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left. \frac{r^{-2+1}}{-2+1} \right|_{r_1}^{r_2}, \quad (57)$$

$$\Delta V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right), \quad (58)$$

$$\Delta V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right). \quad (59)$$

Terceiro, aplicando a definição de capacitância, temos que

$$C \equiv \frac{Q}{\Delta V} = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}. \quad (60)$$

3.1 Energia em capacitores

Considere que para carregar um capacitor com uma carga infinitesimal dq , tivemos que realizar um trabalho $dW = dqV$. Usando a definição de capacitância, este trabalho é dado agora por

$$dW = \frac{q dq}{C}. \quad (61)$$

Para carregarmos o capacitor desde seu estado descarregado até uma carga Q , a quantidade de energia potencial acumulada (ou trabalho realizado) é dada pela integral

$$W = \int_0^Q \frac{q dq}{C}, \quad (62)$$

$$W = \frac{1}{C} \left. \frac{q^2}{2} \right|_0^Q, \quad (63)$$

$$\boxed{W = \frac{Q^2}{2C}}. \quad (64)$$

Este último resultado representa a energia potencial de um capacitor com carga Q e capacitância C . Usando a definição de capacitância, podemos escrever também que

$$W = \frac{1}{2} C \Delta V^2, \quad (65)$$

$$W = \frac{1}{2} Q \Delta V. \quad (66)$$

Exemplo 4. Mostre, usando o conceito de densidade de energia no campo eletrostático, que a energia potencial no capacitor esférico é dada por $Q^2/2C$.

Solução: Devemos calcular a seguinte integral sobre todo o espaço

$$W = \int_{\mathcal{V}} \frac{\epsilon_0 E^2}{2} d\tau. \quad (67)$$

Como o campo elétrico é nulo para $r < r_1$ e $r > r_2$, basta integrarmos no volume que contém campo elétrico, ou seja, na região compreendida entre r_1 e r_2 . Portanto,

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{Q^2}{r^4} r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi, \quad (68)$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \frac{Q^2}{(4\pi\epsilon_0)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin\theta d\theta d\phi \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr, \quad (69)$$

$$W = \frac{4\pi\epsilon_0}{2} \frac{Q^2}{(4\pi\epsilon_0)^2} \left. \frac{r^{-2+1}}{-2+1} \right|_{r_1}^{r_2}, \quad (70)$$

$$W = \frac{4\pi\epsilon_0}{2} \frac{Q^2}{(4\pi\epsilon_0)^2} \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right), \quad (71)$$

$$W = \frac{4\pi\epsilon_0}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right), \quad (72)$$

$$W = \frac{4\pi\epsilon_0}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}}_{\frac{1}{C}} \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right), \quad (73)$$

$$\boxed{W = \frac{Q^2}{2C}}. \quad (74)$$

4 Coeficientes do potencial, de capacitância e de indução

Vimos que a definição de capacitância $C \equiv Q/\Delta V$ expressa o fato de que a carga acumulada no capacitor é proporcional à diferença de potencial ΔV entre os capacitores, quando carregados com a mesma intensidade de carga Q . Sem muito esforço, é fácil notar que esta situação representa um caso particular, pois podemos ter um conjunto maior de condutores que não só dois, e também podemos ter quantidades de cargas diferentes em cada condutor do conjunto.

Considere então um conjunto de N condutores localizados no espaço (veja a figura 6). O i -ésimo condutor tem seu elemento de carga superficial de área da_i localizado pelo vetor \vec{r}_i , ao passo que o j -ésimo condutor tem seu elemento de carga superficial de área da_j localizado pelo vetor \vec{r}_j . Sobre a superfície de cada condutor, temos uma equipotencial. Vamos definir que para o i -ésimo condutor, o potencial num ponto \vec{r}_i , em sua superfície, é V_i . Este potencial será devido a todo o conjunto de cargas nos condutores, inclusive as cargas no próprio condutor i .

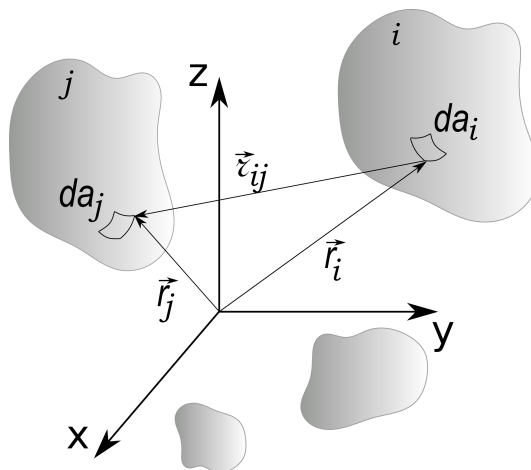


Figura 6: Conjunto de condutores e os vetores de localização dos elementos de carga superficiais.

O potencial elétrico na superfície do condutor i , devido toda carga do condutor j , é dado pela integração sobre toda densidade de carga $\sigma(\vec{r}_j)$ na superfície \mathcal{S}_j da seguinte maneira

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\mathcal{S}_j} \frac{\sigma(\vec{r}_j) da_j}{z_{ij}}. \quad (75)$$

O potencial V_i é obtido mediante soma sobre os condutores, isto é,

$$V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \oint_{\mathcal{S}_j} \frac{\sigma(\vec{r}_j) da_j}{z_{ij}}. \quad (76)$$

Note que a integração é feita inclusive sobre o próprio condutor i quando $j = i$. Neste caso, é conveniente diferenciarmos os vetores em um mesmo condutor por \vec{r}_j e \vec{r}'_j , de tal maneira que $z_j = |\vec{r}_j - \vec{r}'_j|$. Dessa maneira, a integração seria

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_{\mathcal{S}_j} \frac{\sigma(\vec{r}'_j) da_i}{|\vec{r}_j - \vec{r}'_j|}. \quad (77)$$

Este seria o potencial elétrico devido às cargas do condutor j sobre um ponto em \vec{r}'_j na sua superfície \mathcal{S}_j .

Façamos agora o seguinte: multipliquemos o potencial V_i (equação 76) por $\sigma(\vec{r}_i)$ e integremos sobre toda superfície \mathcal{S}_i . Com efeito,

$$\oint_{\mathcal{S}_i} \sigma(\vec{r}_i) V_i da_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \oint_{\mathcal{S}_j} \oint_{\mathcal{S}_i} \frac{\sigma(\vec{r}_i) \sigma(\vec{r}'_j) da_i da_j}{z_{ij}}. \quad (78)$$

Como V_i é uma equipotencial, podemos fatorá-lo da integração à esquerda da equação anterior, ficando com

$$V_i \oint_{S_i} \sigma(\vec{r}_i) da_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \oint_{S_j} \oint_{S_i} \frac{\sigma(\vec{r}_i)\sigma(\vec{r}_j) da_i da_j}{r_{ij}}, \quad (79)$$

$$V_i Q_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \oint_{S_j} \oint_{S_i} \frac{\sigma(\vec{r}_i)\sigma(\vec{r}_j) da_i da_j}{r_{ij}}, \quad (80)$$

$$V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 Q_i} \sum_{j=1}^N \oint_{S_j} \oint_{S_i} \frac{\sigma(\vec{r}_i)\sigma(\vec{r}_j) da_i da_j}{r_{ij}}, \quad (81)$$

$$V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 Q_i} \sum_{j=1}^N \frac{Q_j}{Q_j} \oint_{S_j} \oint_{S_i} \frac{\sigma(\vec{r}_i)\sigma(\vec{r}_j) da_i da_j}{r_{ij}}, \quad (82)$$

$$V_i = \sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0 Q_i Q_j} \oint_{S_j} \oint_{S_i} \frac{\sigma(\vec{r}_i)\sigma(\vec{r}_j) da_i da_j}{r_{ij}} \right) Q_j. \quad (83)$$

Note que a quantidade entre parênteses é um número que depende apenas de aspectos geométricos dos condutores. Apesar de no denominador estarem as quantidades Q_i e Q_j , no numerador do integrando temos $\sigma(\vec{r}_i)$ e $\sigma(\vec{r}_j)$, de tal maneira que a razão dependa apenas da geometria dos condutores. Estas quantidades que relacionam a geometria do i -ésimo com o j -ésimo condutor são chamadas de **coeficientes do potencial** p_{ij} , isto é,

$$p_{ij} \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0 Q_i Q_j} \oint_{S_j} \oint_{S_i} \frac{\sigma(\vec{r}_i)\sigma(\vec{r}_j) da_i da_j}{r_{ij}}, \quad (84)$$

de tal maneira que

$$V_i = \sum_{j=1}^N p_{ij} Q_j. \quad (85)$$

Os elementos p_{ij} são elementos de uma matriz simétrica, pois a troca de i por j não muda o resultado do cálculo na equação 84. Dessa forma, $p_{ij} = p_{ji}$.

A equação 85 estabelece que os potenciais nas superfícies dos condutores são proporcionais às cargas dos condutores por meio de uma relação linear dos coeficientes do potencial. Podemos escrever uma relação inversa, de tal maneira que as cargas nos condutores sejam proporcionais aos potenciais estabelecidos em cada deles. Isto é, podemos escrever

$$Q_j = \sum_{i=1}^N c_{ij} V_i, \quad (86)$$

sendo os elementos de matriz c_{ij} obtidos a partir da matriz inversa dos coeficientes do potencial. Chamamos os elementos c_{ij} com $i = j$ (diagonal principal) de **coeficientes de capacitância**, ao passo que os demais elementos com $i \neq j$ de **coeficientes de indução**.

4.1 Energia para um conjunto de condutores

A energia de um sistema de N condutores pode ser calculada usando a expressão 14. Note que a energia U_i associada somente ao i -ésimo condutor é igual à

$$\frac{1}{2} \oint_{S_i} \sigma(\vec{r}_i) V_i da_i. \quad (87)$$

Como a superfície de um condutor é uma equipotencial, temos que a energia do i -ésimo condutor será igual a

$$U_i = \frac{1}{2} V_i \oint_{S_i} \sigma(\vec{r}_i) da_i, \quad (88)$$

$$U_i = \frac{1}{2} V_i Q_i. \quad (89)$$

A energia potencial U do conjunto será obtida mediante a soma sobre todos os condutores, isto é,

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N V_i Q_i. \quad (90)$$

Em termos dos coeficientes do potencial, a energia potencial será

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N p_{ij} Q_i Q_j, \quad (91)$$

ou em termos dos coeficientes de capacitância e indução

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_{ij} V_i V_j. \quad (92)$$

Os termos com $i = j$ são as chamadas **auto-energias eletrostáticas** do sistema. É importante notar que o fato dos potenciais nos condutores dependerem de suas cargas tanto de forma isolada (coeficientes de capacitância) como de forma acoplada (coeficientes de indução), a energia total do sistema não será dada simplesmente pelas auto-energias, mas também pelas energias provenientes das induções de cargas.

Exemplo 5. Mostre que para um capacitor com seus condutores com cargas Q e $-Q$ sob potenciais V_+ e V_- , respectivamente, a capacitância é dada por

$$C = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{2c_{12} + c_{11} + c_{22}}. \quad (93)$$

Solução: Para dois condutores, temos a seguinte equação matricial

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix}, \quad (94)$$

que implica no sistema

$$\begin{cases} Q_1 = c_{11}V_1 + c_{12}V_2 \\ Q_2 = c_{21}V_1 + c_{22}V_2. \end{cases} \quad (95)$$

Assumindo que $Q_1 = Q$ e $Q_2 = -Q$, e potenciais $V_1 = V_+$ e $V_2 = V_-$, o sistema agora ficaria

$$\begin{cases} Q = c_{11}V_+ + c_{12}V_- \\ -Q = c_{21}V_+ + c_{22}V_-. \end{cases} \quad (96)$$

A solução deste sistema para os potenciais é

$$V_+ = \frac{c_{12} + c_{22}}{c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}} Q, \quad (97)$$

e

$$V_- = \frac{c_{21} + c_{11}}{c_{12}c_{21} - c_{11}c_{22}} Q, \quad (98)$$

A diferença de potencial é, já usando o fato que $c_{12} = c_{21}$,

$$V_+ - V_- = \left(\frac{c_{12} + c_{22}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2} - \frac{c_{12} + c_{11}}{c_{12}^2 - c_{11}c_{22}} \right) Q \quad (99)$$

$$\Delta V = \left(\frac{2c_{12} + c_{11} + c_{22}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2} \right) Q. \quad (100)$$

Usando a definição de capacitância, percebemos que

$$C = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{2c_{12} + c_{11} + c_{22}}. \quad (101)$$

Este resultado ilustra que a definição de capacitância se restringe a um sistema dois condutores.

Exemplo 6. Determine os coeficientes do potencial p_{ij} e o coeficientes de capacitância e indução para o sistema de dois condutores esféricos concêntricos de raios r_1 e r_2 ($r_2 > r_1$) carregados com cargas Q_1 e Q_2 , respectivamente (veja a figura 7).

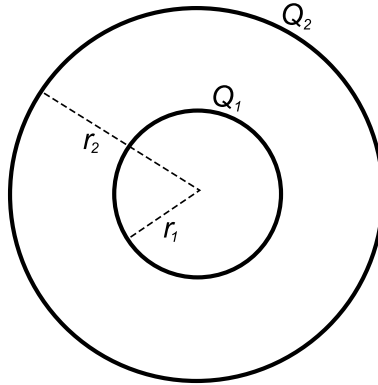


Figura 7: Sistema de dois condutores esféricos concêntricos de raios r_1 e r_2 .

(a) Use inicialmente o fato que o potencial de uma superfície esférica de raio R e carga Q é

$$V(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}, & r \geq R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}, & r \leq R \end{cases} \quad (102)$$

e monte a matriz \mathbf{p} dos coeficientes do potencial.

(b) Obtenha a matriz dos coeficientes de capacitância e indução \mathbf{c} sabendo que $\mathbf{c} = \mathbf{p}^{-1}$.

(c) Determine a capacitância do sistema através da expressão 101 e veja se confere com o método do exemplo 4.

(d) Calcule os coeficientes do potencial explicitamente através da relação

$$p_{ij} \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0 Q_i Q_j} \oint_{S_j} \oint_{S_i} \frac{\sigma(\vec{r}_i) \sigma(\vec{r}_j) da_i da_j}{z_{ij}}, \quad (103)$$

e verifique se os resultados conferem com o método anterior.

Solução: (a) Vamos definir V_1 como sendo o potencial elétrico no condutor de raio r_1 e V_2 o potencial elétrico no condutor de raio r_2 . Usando a expressão para o potencial de uma superfície esférica e o princípio da superposição, os potenciais são dados em função das cargas da seguinte maneira

$$\begin{cases} V_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{r_2} \\ V_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r_2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{r_2}. \end{cases} \quad (104)$$

Fica então direto a relação entre os potenciais e as cargas, de onde podemos tirar os coeficientes do potencial, ou seja,

$$\begin{cases} V_1 = p_{11}Q_1 + p_{12}Q_2 \\ V_2 = p_{21}Q_1 + p_{22}Q_2, \end{cases} \quad (105)$$

então,

$$\boxed{p_{11} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_1}, \quad p_{12} = p_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_2}, \quad p_{22} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_2}.} \quad (106)$$

e a matriz \mathbf{p} procurada é

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_1} & \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_2} \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_2} & \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_2} \end{pmatrix}. \quad (107)$$

(b) A matriz dos coeficientes de capacitância e indução \mathbf{c} é obtida mediante a inversa \mathbf{p}^{-1} . Ou seja,

$$\mathbf{c} = \mathbf{p}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{p}} \begin{pmatrix} p_{22} & -p_{21} \\ -p_{12} & p_{11} \end{pmatrix}. \quad (108)$$

Sendo assim, temos que o determinante é

$$\det \mathbf{p} = p_{11}p_{22} - p_{21}p_{12}, \quad (109)$$

$$\det \mathbf{p} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_2}, \quad (110)$$

$$\det \mathbf{p} = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \left(\frac{1}{r_1 r_2} - \frac{1}{r_2^2} \right), \quad (111)$$

$$\det \mathbf{p} = \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2^2}. \quad (112)$$

Substituindo os coeficientes do potencial e este determinante na equação 108, temos a matriz dos coeficientes de capacitância e indução,

$$\mathbf{c} = (4\pi\epsilon_0)^2 \frac{r_1 r_2^2}{r_2 - r_1} \begin{pmatrix} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_2} & -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_2} \\ -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_2} & \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r_1} \end{pmatrix}, \quad (113)$$

$$\mathbf{c} = 4\pi\epsilon_0 \begin{pmatrix} \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} & -\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \\ -\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} & \frac{r_2^2}{r_2 - r_1} \end{pmatrix}, \quad (114)$$

de onde tiramos que

$$\boxed{c_{11} = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}, \quad c_{12} = c_{21} = -4\pi\epsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}, \quad c_{22} = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_2^2}{r_2 - r_1}.} \quad (115)$$

(c) Substituindo os coeficientes de capacitância e indução na equação 101, temos

$$C = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{2c_{12} + c_{11} + c_{22}}, \quad (116)$$

$$C = \frac{(4\pi\epsilon_0)^2 \frac{r_1 r_2^3}{(r_2 - r_1)^2} - (4\pi\epsilon_0)^2 \frac{r_1^2 r_2^2}{(r_2 - r_1)^2}}{-2 \cdot 4\pi\epsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} + 4\pi\epsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} + 4\pi\epsilon_0 \frac{r_2^2}{r_2 - r_1}}, \quad (117)$$

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{\frac{r_1 r_2^2 (r_2 - r_1)}{(r_2 - r_1)^2}}{\frac{r_2 (r_2 - r_1)}{(r_2 - r_1)}}, \quad (118)$$

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_1 r_2}{(r_2 - r_1)}. \quad (119)$$

Note que, mesmo não assumindo cargas de mesma intensidade nos condutores, a capacitância deve depender apenas de fatores geométricos, resultando na mesma quantidade deduzida anteriormente por meio da definição $C \equiv Q/\Delta V$.

(d) Vamos calcular agora os coeficientes do potencial p_{ij} por meio da integração

$$p_{ij} \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0 Q_i Q_j} \oint_{S_j} \oint_{S_i} \frac{\sigma(\vec{r}_i) \sigma(\vec{r}_j) da_i da_j}{z_{ij}}. \quad (120)$$

Vamos usar a geometria indicada na figura 8 a seguir.

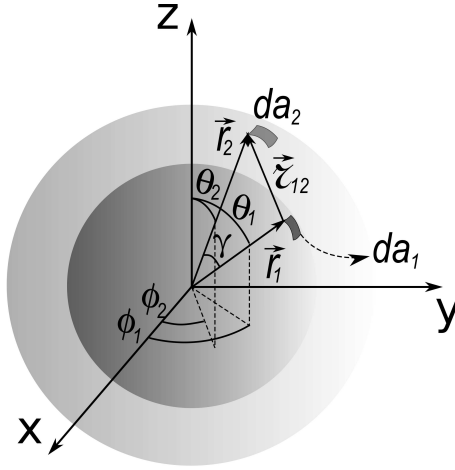


Figura 8: Representação esquemática dos condutores esféricos de raios r_1 e r_2 . São apresentados os vetores \vec{r}_1 e \vec{r}_2 , seus respectivos ângulos esféricos θ_1 , θ_2 , ϕ_1 e ϕ_2 , o ângulo γ entre eles, o vetor separação \vec{z}_{12} e os elementos infinitesimais de áreas nas superfícies dos condutores da_1 e da_2 , que servirão para calcular os coeficientes do potencial.

Usando a geometria proposta, $da_1 = r_1^2 \sin \theta_1 d\theta_1 d\phi_1$, $da_2 = r_2^2 \sin \theta_2 d\theta_2 d\phi_2$, $\sigma(\vec{r}_1) = Q_1/4\pi r_1^2$, $\sigma(\vec{r}_2) = Q_2/4\pi r_2^2$ e, pela lei dos cossenos, $z_{12} = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \gamma}$. Calculando inicialmente p_{12} , temos

$$p_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 Q_1 Q_2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{Q_1 Q_2}{(4\pi)^2 r_1^2 r_2^2} \frac{r_1^2 r_2^2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 d\theta_1 d\phi_1 d\theta_2 d\phi_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \gamma}}, \quad (121)$$

$$p_{12} = \frac{1}{(4\pi)^3 \epsilon_0} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta_1 \sin \theta_2 d\theta_1 d\phi_1 d\theta_2 d\phi_2}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \gamma}}, \quad (122)$$

$$p_{12} = \frac{1}{(4\pi)^3 \epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \frac{\sin \theta_1 d\theta_1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \gamma}} \right) \sin \theta_2 d\theta_2 d\phi_1 d\phi_2. \quad (123)$$

Nesta última equação, fatoramos a integração nas variáveis θ_1 . Já resolvemos esta integração no problema da superfície esférica carregada no cálculo do potencial elétrico pela lei de Coulomb. A diferença é que nesta integral, γ não coincide com θ_1 . Usaremos um argumento de simetria para mostrar que podemos fazer $\gamma = \theta_1$ na integral desejada. O argumento é que como a integração fatorada é inicialmente somente na variável θ_1 , sendo as variáveis θ_2 e ϕ_2 são tomadas como constantes. Neste caso, a simetria esférica nos permite escolher as constantes que sejam convenientes pois, devido a simetria de duas esferas concêntricas, o resultado não irá depender desta escolha. Se fixarmos \vec{r}_2 na direção z na integral fatorada, estaremos

fixando $\theta_2 = 0$, o que implica que neste caso teremos $\gamma = \theta_1$. Desta forma, a integral fatorada (resolvida no fascículo I) é igual a

$$\int_0^\pi \frac{\sin \theta_1 d\theta_1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta_1}} = \frac{1}{r_1 r_2} (|r_1 + r_2| - |r_1 - r_2|), \quad (124)$$

e como $r_2 > r_1$, temos que

$$\int_0^\pi \frac{\sin \theta_1 d\theta_1}{\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos \theta_1}} = \frac{1}{r_1 r_2} (r_1 + r_2 - r_2 + r_1) = \frac{2}{r_2}. \quad (125)$$

Desta forma, o coeficiente do potencial é simplesmente

$$p_{12} = \frac{1}{(4\pi)^3 \epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{r_2} \right) \sin \theta_2 d\theta_2 d\phi_1 d\phi_2, \quad (126)$$

$$p_{12} = \frac{1}{(4\pi)^3 \epsilon_0} \frac{(4\pi)^2}{r_2}, \quad (127)$$

$$p_{12} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r_2}, \quad (128)$$

e por simetria, temos que $p_{21} = p_{12}$.

Vamos calcular agora p_{11} . Neste caso, para diferenciar os vetores, usaremos \vec{r}_1 e \vec{r}'_1 e os ângulos θ , ϕ , θ' e ϕ' , respectivamente. Desta forma, teremos

$$p_{11} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 Q_1^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{Q_1^2}{(4\pi)^2 r_1^2} \frac{r_1^2}{r_1^2} \frac{\sin \theta \sin \theta' d\theta d\phi d\theta' d\phi'}{\sqrt{r_1^2 + r_1^2 - 2r_1 r_1 \cos \gamma}}, \quad (129)$$

$$p_{11} = \frac{1}{(4\pi)^3 \epsilon_0 r_1 \sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\pi \frac{\sin \theta' d\theta'}{\sqrt{1 - \cos \gamma}} \right) \sin \theta d\theta d\phi d\phi', \quad (130)$$

onde podemos usar o mesmo argumento usado anteriormente, fazendo $\gamma = \theta'$. Dessa maneira, fazendo $u = 1 - \cos \theta'$, a integral fatorada será igual a

$$\int_0^2 \frac{du}{\sqrt{u}} = 2 \sqrt{u} \Big|_0^2 = 2\sqrt{2}, \quad (131)$$

e o coeficiente do potencial p_{11} será igual a

$$p_{11} = \frac{1}{(4\pi)^3 \epsilon_0 r_1 \sqrt{2}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (2\sqrt{2}) \sin \theta d\theta d\phi d\phi', \quad (132)$$

$$p_{11} = \frac{(4\pi)^2}{(4\pi)^3 \epsilon_0 r_1}, \quad (133)$$

$$\boxed{p_{11} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r_1}}. \quad (134)$$

De forma análoga, temos que $p_{22} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r_2}$, confirmando assim todos os resultados obtidos anteriormente por outra forma de cálculo.