

Licenciatura em Física - Campus Natal/Central

Prof. Tibério Alves, D. Sc.

Eletromagnetismo Clássico I - 2019.2

Fascículo III - A equação de Laplace

18 de setembro de 2019

Resumo

Neste fascículo, vamos estudar a equação de Laplace. Aplicaremos a técnica de separação de variáveis para resolver a equação de Laplace com problemas com simetria cartesiana. Posteriormente, vamos estudar a equação de Laplace em coordenadas esféricas e resolver problemas através de suas soluções gerais com condições de contorno especificadas.

1 Equação de Laplace

Vimos que podemos determinar o campo e potencial elétricos através das seguintes equações

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}') d\tau' \hat{z}}{z^2} \quad (1)$$

e

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}') d\tau'}{z}. \quad (2)$$

Como foi notado, estas integrais possuem difícil solução analítica. Além disso, requerem total especificação da distribuição de cargas.

Uma forma alternativa de tratar o problema seria através da equação de Poisson

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (3)$$

que com as condições de contorno adequadas se torna totalmente equivalente à equação 2. Muitos problemas de interesse da física envolvem densidade superficiais, ou seja, toda distribuição de carga é nula, exceto em superfícies. Nestes casos, para pontos fora das superfícies, temos $\rho = 0$, o que conduz à **equação de Laplace**

$$\nabla^2 V = 0, \quad (4)$$

que, em coordenadas cartesianas retangulares, por exemplo, toma a forma

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0. \quad (5)$$

1.1 A equação de Laplace em uma dimensão

Vamos começar a nossa abordagem na busca de soluções da equação de Laplace, resolvendo o problema apenas em uma dimensão. Para isso, considere o problema de duas placas infinitas paralelas aos planos y e z localizadas em $x = 0$ e $x = a$. Neste caso, devido a simetria do problema, podemos assumir que o potencial será função apenas de x , ou seja, $V = V(x)$. Considere que potencial elétrico é especificado na placas, de tal forma que $V(0) = V_0$ e $V(a) = V_a$.

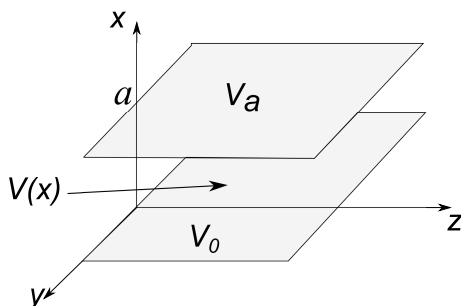


Figura 1: Placas paralelas infinitas (figura em corte) com potenciais elétricos especificados nos planos (contornos).

Nosso problema consiste em determinarmos o potencial elétrico na região entre as placas, ou seja, calcularmos quem é a função $V(x)$ dadas **condições de contorno** especificadas. Para isso, a equação de Laplace em coordenadas cartesianas para este problema unidimensional é dada por

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = 0, \quad (6)$$

isto é, a equação diferencial parcial se tornou agora uma equação ordinária. A solução desta equação é simples, basta integrarmos duas vezes. Com efeito,

$$\frac{dV}{dx} = m, \quad (7)$$

$$V(x) = mx + n, \quad (8)$$

onde m e n são constantes de integração. Estas constantes podem ser determinadas usando as condições de contorno especificadas para o problema, ou seja, $V(0) = V_0$ e $V(a) = V_a$. Essas condições conduzem às seguintes equações para as constantes m e n ,

$$\begin{cases} V_0 = n \\ V_a = ma + n, \end{cases} \quad (9)$$

cujas soluções são $m = (V_a - V_0)/a$ e $n = V_0$. Portanto, nossa solução da equação de Laplace unidimensional para as condições de contorno especificadas é

$$\boxed{V(x) = \left(\frac{V_a - V_0}{a} \right) x + V_0}. \quad (10)$$

Note que a solução se trata de uma função linear e que, excetuando-se os contornos onde a função já é especificada, o potencial elétrico em uma posição x é dado pela média dos potenciais em posições adjacentes, digamos $V(x+b)$ e $V(x-b)$ (veja a figura 2 a seguir). Desta forma, o potencial para qualquer ponto x fora dos contornos, seria dado pela média

$$V(x) = \frac{1}{2} [V(x+b) + V(x-b)]. \quad (11)$$

A média da equação 11 é uma propriedade geral para o potencial elétrico, inclusive para os casos em que dependa de duas ou três variáveis. Para duas variáveis, temos, por exemplo, $V = V(x, y)$, sendo o potencial elétrico uma superfície do ponto de vista gráfico. A média neste caso, poderia ser feita utilizando um círculo C de raio R centrado em (x_0, y_0) , com potencial $V(x_0, y_0)$ neste ponto, isto é

$$V(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi R} \oint_C V(x, y) dl. \quad (12)$$

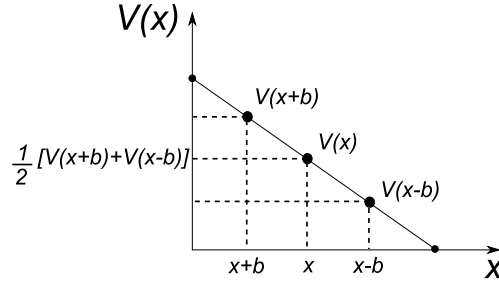


Figura 2: Gráfico de uma solução da equação de Laplace unidimensional. Note que, para um determinado ponto x fora dos contornos, o potencial é dado pela média da função nos pontos adjacentes, ou seja, $V(x+b)$ e $V(x-b)$.

Para três variáveis, temos que $V = V(x, y, z)$, e a média em torno de um ponto (x_0, y_0, z_0) seria dada pela integral em uma superfície esférica S de raio R centrado em (x_0, y_0, z_0) , ou seja.

$$V(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_S V(x, y, z) da. \quad (13)$$

Uma outra propriedade interessante da solução da equação de Laplace é esta não pode possuir mínimos ou máximos **locais**, pois pontos críticos não poderiam descritos pela média na equação 11. A função potencial elétrico só terá valor mínimo ou máximo **globais** nos extremos, ou seja, nos contornos.

Como vimos, a solução de Laplace para o caso unidimensional foi encontrada mediante a especificação da função potencial em dois pontos, ou seja, $x = a$ e $x = 0$. Poderíamos especificar a função potencial no contorno e sua derivada, ou seja, o campo elétrico. De toda maneira, temos que ter duas condições para determinar as constantes m e n . Essas condições e propriedades atreladas à solução da equação de Laplace, nos permite enunciar um teorema muito importante em eletrostática. O chamado **teorema da unicidade**.

Teorema 1. Para um determinado conjunto de condições de contorno especificadas para um problema, a equação de Laplace possui apenas uma única solução.

Este teorema garante que, se encontrarmos uma solução para um determinado problema obedecendo suas condições de contorno, encontramos univocamente a solução do problema e esta é a única permitida.

1.2 A equação de Laplace em duas dimensões

Para o caso bidimensional, a função potencial elétrico, dada como solução da equação de Laplace, não seria mas uma curva como no caso unidimensional, mas sim uma superfície. Esta superfície deve obedecer às mesmas considerações listadas para o caso unidimensional. Como exemplo, vamos tratar o problema a seguir.

Exemplo 1. Duas placas condutoras infinitas ($x \geq 0$) e aterradas estão paralelas ao plano xz , uma em $y = 0$, outra em $y = a$. A superfície lateral na extremidade esquerda, em $x = 0$, possui potencial especificado pela função $V_0(y)$ (veja figura 3). Encontre o potencial na região entre as placas, (a) considerando que a $V_0(y) = V_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)$ e (b) considerando $V_0(y) = V_0$.

Solução: Devemos encontrar a solução geral para o problema e adequá-la para as seguintes condições de contorno:

- (i) $\lim_{x \rightarrow \infty} V(x, y) = 0$
- (ii) $V(x, 0) = 0$
- (iii) $V(x, a) = 0$
- (iv) $V(0, y) = V_0(y)$

A condição de contorno (i) se deve ao fato que o potencial elétrico deve ser uma função finita, neste caso.

A equação de Laplace para este problema fica explícita por

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0. \quad (14)$$

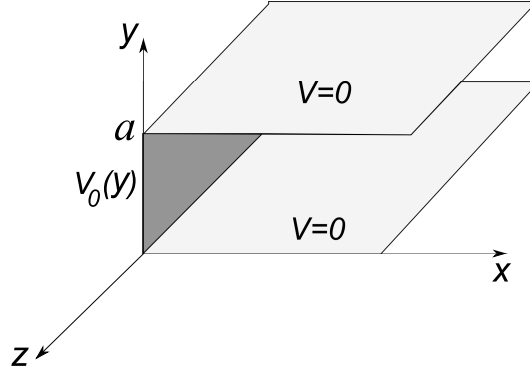


Figura 3: Duas placas infinitas ($x \geq 0$) e aterradas estão paralelas ao plano xz . Superfície lateral definida para $x = 0$ possui a função potencial elétrico especificada como sendo $V_0(y)$.

Para encontrarmos a solução geral para o problema, usaremos o método da separação de variáveis. O problema possui independência na coordenada z , portanto $V = V(x, y) = X(x)Y(y)$. A equação de Laplace se torna agora

$$Y \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0. \quad (15)$$

e dividindo por XY , obtemos

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0, \quad (16)$$

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -\frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}. \quad (17)$$

Perceba que ambos os lados da equação 17, dependem de variáveis independentes diferentes, portanto sendo ambas igual a uma constante. Uma escolha apropriada é uma constante do tipo k^2 (suas razões ficarão claras mais adiante). Desta forma, temos

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - k^2 X = 0, \quad (18)$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + k^2 Y = 0. \quad (19)$$

com soluções dadas por

$$X(x) = Ae^{-kx} + Be^{kx} \quad (20)$$

e

$$Y(y) = C \sin(ky) + D \cos(ky). \quad (21)$$

Desta forma, a solução geral é dada por

$$V(x, y) = (Ae^{-kx} + Be^{kx})[C \sin(ky) + D \cos(ky)]. \quad (22)$$

Aplicando a condição de contorno (i),

$$\lim_{x \rightarrow \infty} V(x, y) = (Be^{kx})[C \sin(ky) + D \cos(ky)] = 0. \quad (23)$$

de onde tiramos que $B = 0$, chegando a uma solução do tipo (omitindo a constante A)

$$V(x, y) = e^{-kx}[C \sin(ky) + D \cos(ky)]. \quad (24)$$

Aplicando a condição de contorno (ii),

$$V(x, 0) = De^{-kx} = 0. \quad (25)$$

de onde tiramos que $D = 0$, chegando a uma solução do tipo

$$V(x, y) = Ce^{-kx} \sin(ky). \quad (26)$$

Aplicando a condição de contorno (iii),

$$V(x, a) = Ce^{-kx} \sin(ka) = 0. \quad (27)$$

de onde tiramos que $\sin(ka) = 0$. Esta equação possui um conjunto infinito de soluções dadas por

$$k_n = \frac{n\pi}{a} \quad n = 1, 2, 3... \quad (28)$$

Nossa solução torna-se então uma combinação linear de todas as possíveis soluções, ou seja,

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-n\pi x/a} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \quad (29)$$

Aplicando agora a condição (iv), temos

$$V(0, y) = V_0(y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right). \quad (30)$$

Esta equação mostra claramente que a função $V_0(y)$ é dada como uma série de Fourier de senos. Nos resta então determinar os coeficientes C_n desta série para determinarmos a solução para o problema compatível com todas as condições de contorno. Usaremos o “truque” de Fourier, que consiste em multiplicarmos ambos os lados da equação 30 por $\sin\left(\frac{n'\pi y}{a}\right)$ (n' sendo inteiro) e integrarmos em todo domínio para y ($0 \leq y \leq a$). Veja o desenvolvimento a seguir.

$$\int_0^a V_0(y) \sin\left(\frac{n'\pi y}{a}\right) dy = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{n'\pi y}{a}\right) dy \quad (31)$$

Para resolver a integral do lado direito da equação, vamos usar a seguinte relação trigonométrica

$$\sin(\theta) \sin(\phi) = \frac{1}{2} [\cos(\theta - \phi) - \cos(\theta + \phi)], \quad (32)$$

ou seja,

$$\sin\left(\frac{n'\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) = \frac{1}{2} \left\{ \cos\left[\frac{(n' - n)\pi y}{a}\right] - \cos\left[\frac{(n' + n)\pi y}{a}\right] \right\}. \quad (33)$$

Perceba que se $n' = n$,

$$\sin^2\left(\frac{n'\pi y}{a}\right) = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2n'\pi y}{a}\right) \right], \quad (34)$$

o que conduz ao resultado,

$$\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{n'\pi y}{a}\right) dy = \int_0^a \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{2n'\pi y}{a}\right) \right] dy = \frac{a}{2} \quad (35)$$

Para $n' \neq n$,

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{1}{2} \left\{ \cos\left[\frac{(n' - n)\pi y}{a}\right] - \cos\left[\frac{(n' + n)\pi y}{a}\right] \right\} dy = \\ \frac{1}{2} \left\{ \frac{a}{(n' - n)\pi} [\sin((n' - n)\pi) - \sin(0)] - \frac{a}{(n' + n)\pi} [\sin((n' + n)\pi) - \sin(0)] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

Isto indica que a integral em 31 tem propriedade de uma **delta de Kronecker**¹, ou seja,

$$\int_0^a \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{n'\pi y}{a}\right) dy = \frac{a}{2} \delta_{n,n'} \quad (37)$$

¹Leopold Kronecker, matemático alemão (1823-1891).

onde

$$\delta_{n,n'} = \begin{cases} 0, & \text{para } n \neq n' \\ 1, & \text{para } n = n' \end{cases} \quad (38)$$

Voltando para equação 30, temos

$$\frac{a}{2} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \delta_{n,n'} = \int_0^a V_0(y) \sin\left(\frac{n'\pi y}{a}\right) dy \quad (39)$$

onde somente os termos com $n = n'$ sobram, de tal forma que os coeficientes C_n ficam dados por

$$C_n = \frac{2}{a} \int_0^a V_0(y) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) dy \quad (40)$$

Vamos inicialmente responder o item (a) do exemplo proposto, isto é, assumindo $V_0(y) = V_0 \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)$. Neste caso, os coeficientes C_n são

$$C_n = \frac{2V_0}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) dy, \quad (41)$$

$$C_n = \begin{cases} V_0, & \text{para } n = 1 \\ 0, & \text{para } n \neq 1. \end{cases} \quad (42)$$

Note que C_n será zero $n \neq 1$ e V_0 para $n = 1$, devido a ortogonalidade expressa na equação 37. Portanto, o potencial elétrico será

$$\boxed{V(x, y) = V_0 e^{-\pi x/a} \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right)}. \quad (43)$$

Com posse do potencial elétrico, podemos encontrar o campo elétrico,

$$\vec{E}(x, y) = -\nabla V(x, y), \quad (44)$$

$$\vec{E}(x, y) = -\frac{\partial V}{\partial x} \hat{x} - \frac{\partial V}{\partial y} \hat{y}, \quad (45)$$

$$\boxed{\vec{E}(x, y) = \frac{\pi V_0}{a} e^{-\pi x/a} \left[\sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \hat{x} - \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \hat{y} \right]}. \quad (46)$$

Perceba que, nos limites de proximidade das placas condutoras aterradas, ou seja, quando $y \rightarrow 0$ ou $y \rightarrow a$, o campo elétrico só possui componente tangencial, isto é, E_y , cuja intensidade diminui com o afastamento a extremidade lateral em $x = 0$. Considerando $V_0 > 0$, as linhas de campo devem emergir na extremidade lateral e incidir nas placas condutoras perpendicularmente (veja a figura 4 a seguir).

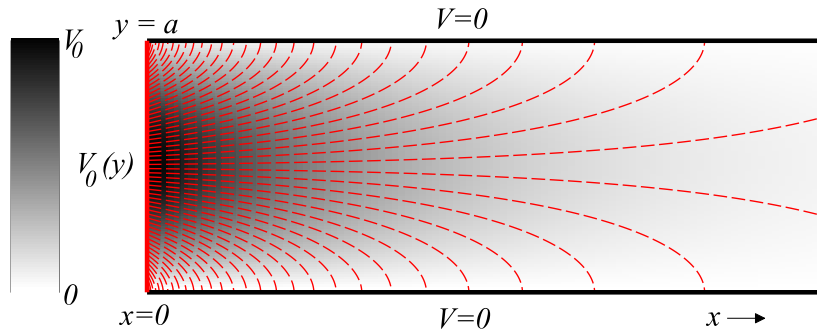


Figura 4: Configuração para o potencial elétrico e para o campo elétrico considerando $V_0(y) = V_0 \sin(\pi y/a)$ em uma secção finita do problema. À esquerda, temos o padrão de cores (escala de cinza) para os valores do potencial como função de x e y na região desejada variando do valor mínimo nulo para o valor máximo V_0 . À direita, temos os gráficos para o potencial elétrico (plano em escala de cinza) e linhas de campo elétrico (linhas tracejadas vermelhas).

Resolvendo agora o item (b), considere que a função uniforme $V_0(y) = V_0$. Os coeficientes C_n para série de Fourier desta função são

$$C_n = \frac{2V_0}{a} \int_0^a \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right) dy = \frac{2V_0}{n\pi} (1 - \cos n\pi) \quad (47)$$

$$C_n = \begin{cases} 0, & \text{para } n \text{ par} \\ \frac{4V_0}{n\pi}, & \text{para } n \text{ ímpar} \end{cases} \quad (48)$$

Neste caso, a solução do problema para $V_0(y) = V_0$ toma a seguinte forma,

$$V(x, y) = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-n\pi x/a} \sin\left(\frac{n\pi y}{a}\right). \quad (49)$$

Devido a natureza das condições de contorno e também da equação de Laplace, nossa solução é aproximativa no sentido de que a função $V_0(y)$ é dada por uma série de Fourier de infinitos termos. A solução exata é atingida analiticamente via o limite $n \rightarrow \infty$. Como abordagem aproximativa e para visualizarmos graficamente esta solução, vamos considerar a soma com os termos até $n = 1$, $n = 3$ e $n = 21$. Os resultados estão explícitos na figura 5 a seguir.

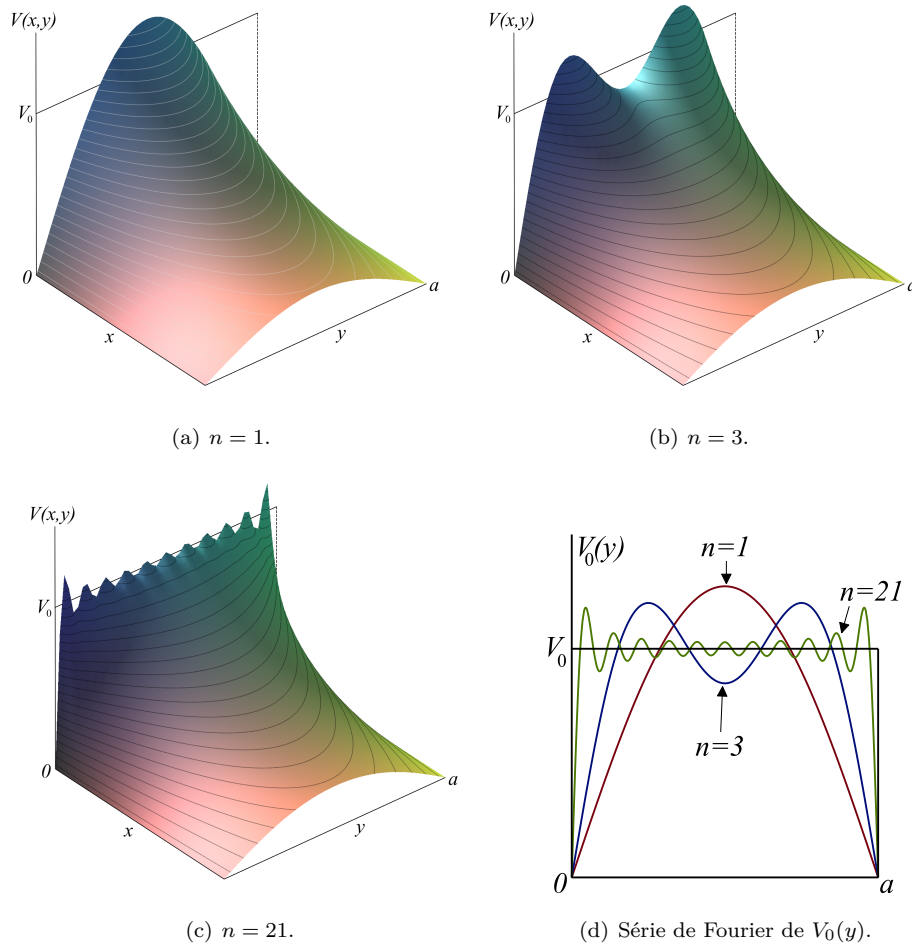


Figura 5: Gráfico da solução da equação de Laplace para o caso bidimensional proposto. Note que a superfície que representa a função $V(x, y)$ se “estica”, de tal forma que os contornos são extremos globais para o potencial elétrico. Os gráficos da solução na equação 48 estão expostos com as aproximações para $n = 1$ (a), $n = 3$ (b) e $n = 21$ (c). Em (d), temos a série de Fourier para a função constante V_0 para as aproximações propostas.

Note que a superfície que representa a função potencial elétrico $V(x, y)$ se estende sobre o espaço sendo nula nos contornos em $y = 0$ e $y = a$. No plano yz ($x = 0$), a superfície se aproxima da função

constante V_0 com o aumento de termos na série de Fourier, como podemos perceber com o aumento de termos para $n = 1$, $n = 3$ e $n = 21$, como explícito na figura 5.

2 Equação de Laplace em coordenadas esféricas

A equação de Laplace em coordenadas esféricas se apresenta através do operador Laplaciano nestas coordenadas, ou seja,

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0. \quad (50)$$

Iremos nos ater a problemas com total simetria azimutal, de tal forma que $V = V(r, \theta)$. Isto reduz a equação acima para

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (51)$$

Podemos recorrer ao método de separação de variáveis para V , de tal maneira que $V(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$, o que conduz a equação a seguir

$$\Theta \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{R}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (52)$$

onde podemos multiplicar a equação por $1/R\Theta$, chegando à

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) = - \frac{1}{\Theta \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right). \quad (53)$$

Percebe-se que ambos os lados da equação dependem de variáveis independentes diferentes, o que nos permite afirmar que ambos os lados da equação são iguais a uma constante de separação. A constante de separação escrita do tipo $l(l+1)$ (com l inteiro positivo) toma esta forma devido condições de convergência das séries de potências que são soluções da equação polar (ver material suplementar). Sendo assim, temos duas equações diferenciais ordinárias a serem resolvidas, ou seja,

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - Rl(l+1) = 0, \quad (54)$$

$$\frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \Theta \sin \theta l(l+1) = 0. \quad (55)$$

A equação 54 é um equação do tipo Cauchy-Euler e a equação 55 é a equação de Legendre. A equação de Cauchy-Euler pode ser resolvida através da substituição $r = e^t$. Sendo assim, usando a regra da cadeia,

$$\frac{dR}{dr} = \frac{dt}{dr} \frac{dR}{dt} = \frac{1}{r} \frac{dR}{dt} \quad (56)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} = -\frac{1}{r^2} \left[\frac{dR}{dt} - \frac{d^2 R}{dt^2} \right]. \quad (57)$$

Substituindo as equações 56 e 57 em 54, obtemos a seguinte equação,

$$\frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{dR}{dt} - Rl(l+1) = 0, \quad (58)$$

que pode ser resolvida pela solução da equação característica

$$\lambda^2 + \lambda - l(l+1) = 0, \quad (59)$$

com soluções

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4l(l+1)}}{2}, \quad (60)$$

$$\lambda_+ = l, \quad \lambda_- = -(l+1), \quad (61)$$

de tal maneira que a solução radial toma então a seguinte forma,

$$R(r) = Ar^l + \frac{B}{r^{l+1}}. \quad (62)$$

2.1 Polinômios de Legendre e solução geral

A equação de Legendre (equação 55) pode ser resolvida de diferentes formas. No material suplementar sobre equação de Legendre, temos uma solução via série de potências. As soluções são os chamados **polinômios de Legendre** na ordem l e na variável $x = \cos \theta$, ou seja,

$$\Theta(\theta) = P_l(\cos \theta) \quad (63)$$

Na tabela 1 a seguir, estão apresentados alguns polinômios de Legendre.

Tabela 1: Polinômios de Legendre

l	$P_l(\cos \theta)$
0	1
1	$\cos \theta$
2	$\frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1)$
3	$\frac{1}{2}(5 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta)$
4	$\frac{1}{8}(35 \cos^4 \theta - 30 \cos^2 \theta + 3)$
5	$\frac{1}{8}(63 \cos^5 \theta - 70 \cos^3 \theta + 15 \cos \theta)$

Uma propriedade importante dos polinômios de Legendre é o fato deles obedecerem a uma **relação de ortogonalidade**. O produto interno, diga-se a integral sobre todo intervalo na variável θ , entre dois polinômios de Legendre é nulo, se forem polinômios distintos, e $\frac{2}{2l+1}$ para o mesmo polinômio P_l . Ou seja,

$$\int_0^\pi P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \begin{cases} 0, & \text{para } l \neq l' \\ \frac{2}{2l+1}, & \text{para } l = l'. \end{cases} \quad (64)$$

Face ao exposto, percebemos que existe uma infinidade de soluções visto que l pode ser qualquer inteiro positivo. Temos então uma solução geral que é uma combinação linear de todas as possíveis soluções, sendo escrita por

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta). \quad (65)$$

Esta é a **solução geral** da equação de Laplace em coordenadas esféricas para problemas com total simetria azimutal. Os problemas de valor de contorno consistem em determinarmos os coeficientes A_l 's e B_l 's que se adequam as condições de contorno impostas pelo problema.

Exemplo 2. Uma esfera metálica de raio R é colocada numa região onde, inicialmente, o campo elétrico é uniforme dado por $\vec{E} = E_0 \hat{z}$ e potencial elétrico definido por $V(z) = -E_0 z$. Determine o potencial e campo elétrico externos à esfera após sua imersão na região descrita bem como sua densidade superficial de carga induzida. Considere que o potencial é nulo no interior da esfera.

Solução: As condições de contorno para o problema são:

- (i) $V(r = R, \theta) = 0$. Potencial elétrico no interior da esfera é uniforme devido o campo elétrico ser nulo (blindagem eletrostática). Como o potencial elétrico deve ser sempre uma função contínua, ele deve ser igual a zero no interior (condição informada no problema) bem como na interface (superfície) da esfera condutora.

- (ii) $V(r, \theta) = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta$ para $r \gg R$. O potencial numa região com r muito maior que R não deve sofrer mudança devido a indução de cargas na superfície do condutor, tendo em vista que se trata de uma região muito distante da esfera.

Vamos recordar a solução geral dada para a equação de Laplace em coordenadas esféricas com total simetria azimutal, isto é,

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta), \quad (66)$$

e aplicar as condições de contorno mencionadas para determinar os coeficientes A_l 's e B_l 's.

A condição (i) determina que

$$V(r = R, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l R^l + \frac{B_l}{R^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) = 0, \quad (67)$$

o que conduz a

$$A_l R^l + \frac{B_l}{R^{l+1}} = 0, \quad (68)$$

$$B_l = -A_l R^{2l+1}. \quad (69)$$

Portanto, reduzimos nossa solução geral para

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l \left(r^l - \frac{R^{2l+1}}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta). \quad (70)$$

A condição (ii) determina que

$$\lim_{r \gg R} V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta) = -E_0 r \cos \theta. \quad (71)$$

Podemos agora aplicar o mesmo truque de Fourier que aplicamos na aula anterior para determinar os coeficientes A_l . No que, no lado direito da equação, $\cos \theta$ equivale ao polinômio de Legendre de ordem 1, ou seja, $\cos \theta = P_1(\cos \theta)$. Sendo assim, se multiplicarmos a última equação por $P_{l'}(\cos \theta)$ e integrarmos como na equação 64, podemos aplicar a propriedade de ortogonalidade dos polinômios de Legendre e determinar os A_l , ou seja,

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l \int_0^{\pi} P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta = -E_0 r \int_0^{\pi} P_1(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (72)$$

Note que o lado direito desta equação é nulo para todo $l \neq 1$, tendo em vista a ortogonalidade dos polinômios de Legendre, e igual à $\frac{2}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{2}{3}$ para $l = 1$, como indica a equação 64. Isso faz com que todos os termos do somatório do lado esquerdo seja nulo, exceto para $l = 1$, de onde tiramos que

$$A_1 r^1 \int_0^{\pi} [P_1(\cos \theta)]^2 \sin \theta d\theta = -E_0 r \int_0^{\pi} [P_1(\cos \theta)]^2 \sin \theta d\theta, \quad (73)$$

$$A_1 = -E_0, \quad (74)$$

e todos os demais A_l são nulos, ou seja,

$$A_l = \begin{cases} 0, & l \neq 1 \\ -E_0, & l = 1, \end{cases} \quad (75)$$

e os coeficientes B_l são dados por

$$B_l = \begin{cases} 0, & l \neq 1 \\ E_0 R^3, & l = 1. \end{cases} \quad (76)$$

Desta maneira, nossa solução particular que atende as condições de contorno especificadas é

$$V(r, \theta) = A_1 \left(r^1 - \frac{R^{2 \cdot 1 + 1}}{r^{1+1}} \right) P_1(\cos \theta), \quad (77)$$

$$\boxed{V(r, \theta) = -E_0 \left(r - \frac{R^3}{r^2} \right) \cos \theta}. \quad (78)$$

A partir do potencial elétrico, obtemos o campo elétrico por $\vec{E} = -\nabla V$, ou seja,

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta}, \quad (79)$$

$$\vec{E} = E_0 \left(1 + \frac{2R^3}{r^3} \right) \cos \theta \hat{r} + E_0 \left(\frac{R^3}{r^3} - 1 \right) \sin \theta \hat{\theta}. \quad (80)$$

Esta expressão para o campo elétrico pode ser rearranjada para uma melhor compreensão do resultado. Usando o fato que $\hat{z} = \cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}$, note que

$$\vec{E} = E_0 (\cos \theta \hat{r} - \sin \theta \hat{\theta}) + \frac{E_0 R^3}{r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}), \quad (81)$$

$$\vec{E} = E_0 \hat{z} + \frac{E_0 R^3}{r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}), \quad (82)$$

Mostrando que o campo elétrico fora da esfera será o resultado de uma **superposição** do campo elétrico **uniforme** $E_0 \hat{z}$, já aplicado, e de um campo elétrico típico de **dipolo elétrico** $\frac{E_0 R^3}{r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})$, proveniente da carga induzida que surge na superfície do condutor.

Na figura 6(a) a seguir, é apresentado um gráfico (plano $z-x$) para o campo elétrico na região externa à esfera (vetores em preto) e a configuração de linhas de campo distorcidas (linhas sólidas em vermelho) devido a indução de cargas na superfície da esfera. Observe a incidência ortogonal destas linhas.

Para calcularmos a densidade superficial de carga induzida, vamos usar a equação para descontinuidade da componente normal do campo elétrico em uma interface, isto é,

$$E_{\perp}^{acima} - E_{\perp}^{abaixo} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}. \quad (83)$$

Imediatamente acima da superfície da esfera ($r \rightarrow R$), so temos componente radial (normal à superfície), fato já esperado para um condutor. Veja,

$$\vec{E} = E_0 \left(1 + \frac{2R^3}{R^3} \right) \cos \theta \hat{r} + E_0 \left(\frac{R^3}{R^3} - 1 \right) \sin \theta \hat{\theta}, \quad (84)$$

$$\vec{E} = 3E_0 \cos \theta \hat{r}. \quad (85)$$

Sendo assim, $E_{\perp}^{acima} = 3E_0 \cos \theta$ e $E_{\perp}^{abaixo} = 0$, o que conduz à

$$\boxed{\sigma(\theta) = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta}. \quad (86)$$

Na figura 6(b) temos uma representação da densidade superficial de carga induzida devido a expressão 86. Trata-se de um mapeamento colorido entre o vermelho (1,0) como máximo de densidade carga e azul (-1,0) como mínimo de densidade de carga.

Podemos chegar a um resultado interessante em relação ao campo elétrico devido exclusivamente a densidade superficial de carga induzida no interior da esfera. Para isso, vamos desenvolver o cálculo, inicialmente para o potencial elétrico, devido a distribuição $\sigma(\theta)$ encontrada, ou seja,

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\vec{r}') da'}{\boldsymbol{z}}. \quad (87)$$

Nesta integral, os vetores de interesse e a geometria estão explícitos na figura 7 a seguir, de tal forma que $\boldsymbol{z} = \vec{r} - \vec{r}'$, com $\vec{r} = z\hat{z}$, $\vec{r}' = R\hat{r}$ e $\boldsymbol{z} = (z^2 + R^2 - 2Rz \cos \theta')^{1/2}$.

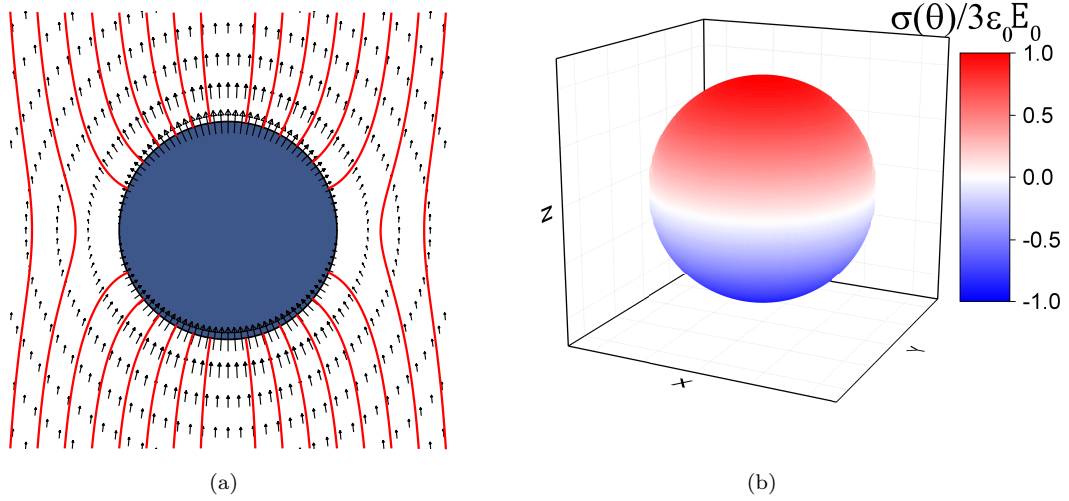


Figura 6: Em (a), temos a configuração do campo elétrico e linhas de campo distorcidas devido a indução de carga na esfera. Em (b), temos o mapeamento colorido da densidade superficial de carga induzida $\sigma(\theta)/3\epsilon_0 E_0$.

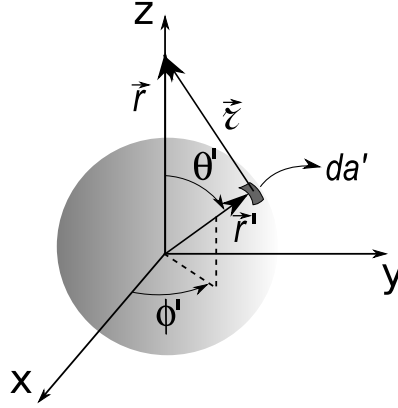


Figura 7: Superfície esférica carregada com densidade $\sigma(\vec{r})$ de cargas e os vetores de interesse.

Sendo assim, temos que resolver a integral

$$V(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{3\epsilon_0 E_0 \cos \theta' R^2 \sin \theta' d\theta d\phi'}{(z^2 + R^2 - 2Rz \cos \theta')^{1/2}}, \quad (88)$$

$$V(z) = \frac{3E_0 R^2}{2} \int_0^\pi \frac{\cos \theta' \sin \theta' d\theta'}{(z^2 + R^2 - 2Rz \cos \theta')^{1/2}}. \quad (89)$$

Usando a substituição $u = z^2 + R^2 - 2Rz \cos \theta'$, temos $\sin \theta' d\theta' = du/2Rz$ e $\cos \theta' = \frac{z^2 + R^2 - u}{2zR}$. Desta maneira, a integral fica

$$V(z) = \frac{3E_0 R^2}{2(2zR)^2} \int_{(R-z)^2}^{(R+z)^2} \left[\frac{(z^2 + R^2)}{u^{1/2}} - u^{1/2} \right] du, \quad (90)$$

$$V(z) = \frac{3E_0 R^2}{2(2zR)^2} \left[(z^2 + R^2) \frac{u^{-1/2+1}}{-1/2+1} \Big|_{(R-z)^2}^{(R+z)^2} - \frac{u^{1/2+1}}{1/2+1} \Big|_{(R-z)^2}^{(R+z)^2} \right], \quad (91)$$

$$V(z) = \frac{3E_0 R^2}{2(2zR)^2} \left[2(z^2 + R^2)(|R+z| - |R-z|) - \frac{2}{3}(|R+z|^3 - |R-z|^3) \right]. \quad (92)$$

Usando o fato que para os pontos no interior da esfera $z < R$, temos que $|R - z| = R - z$. Então,

$$V(z) = \frac{3E_0R^2}{2(2zR)^2} \left[2(z^2 + R^2)(R + z - R + z) - \frac{2}{3}((R + z)^3 - (R - z)^3) \right], \quad (93)$$

$$V(z) = \frac{3E_0R^2}{2(2zR)^2} \left[4z(z^2 + R^2) - \frac{2}{3}(6R^2z + 2z^3) \right], \quad (94)$$

$$V(z) = \frac{3E_0R^2}{2(2zR)^2} \frac{8z^3}{3}, \quad (95)$$

$$V(z) = E_0z. \quad (96)$$

Este resultado é compatível com um campo elétrico $\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial z}\hat{z} = -E_0\hat{z}$, provando que o campo gerado pela carga superficial induzida no interior da esfera se opõe exatamente ao campo elétrico uniforme $\vec{E} = E_0\hat{z}$, promovendo a **blindagem eletrostática** em seu interior.

2.2 Problemas com especificação de $V(\theta)$ ou $\sigma(\theta)$

O problema da esfera condutora, imersa em campo elétrico uniforme, ilustra bem vários aspectos da técnica de soluções de problemas em eletrostática para o potencial elétrico, usando a equação de Laplace em coordenadas esféricas com simetria azimutal. A aplicação das condições de contorno especificadas, determina os coeficientes A_l e B_l que levam ao resultado procurado para o potencial elétrico.

Nos problemas de eletrostática que apresentam simetria esférica azimutal, muitas vezes são especificados ou a densidade superficial de carga $\sigma = \sigma(\theta)$, ou o potencial elétrico $V = V(\theta)$ na superfície de uma esfera. Se essas funções puderem ser escritas em termos dos polinômios de Legendre, podemos usar a propriedade de ortogonalidade dos mesmos e determinar os coeficientes da solução geral e obter uma solução particular para o problema.

Considere uma superfície esférica de raio R centrada na origem de um sistema de coordenadas cartesianas. A partir da solução geral 65, e sabendo que o potencial elétrico deve ser uma função contínua e finita, o potencial será inicialmente expresso por

$$V(r, \theta) = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta), & r \leq R \\ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta), & r \geq R. \end{cases} \quad (97)$$

Para $r \leq R$, os coeficientes B_l são todos nulos e para $r \geq R$, os coeficientes A_l são nulos. Sendo o potencial contínuo em $r = R$, temos que

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{R^{l+1}} P_l(\cos \theta), \quad (98)$$

o que indica que $B_l = A_l R^{2l+1}$. Usando a expressão para $r \leq R$ em $r = R$, temos que

$$V(R, \theta) = V(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos \theta). \quad (99)$$

Vamos multiplicar a equação anterior por um polinômio de Legendre $P_{l'}(\cos \theta)$ e integrar em todo intervalo polar, ou seja,

$$\int_0^{\pi} V(\theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l \int_0^{\pi} P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (100)$$

Note que, devido a condição de ortogonalidade dos polinômios de Legendre (veja a equação 64), a integral do lado direito da equação anterior é nula para $l \neq l'$ e $\frac{2}{2l+1}$ para $l = l'$. Isto quer dizer que o somatório infinito se reduz apenas a um termo, ou seja,

$$\int_0^{\pi} V(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta = A_l R^l \frac{2}{2l+1}, \quad (101)$$

de onde podemos escrever os coeficientes A_l da seguinte forma

$$A_l = \frac{2l+1}{2R^l} \int_0^\pi V(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (102)$$

e conseqüentemente os B_l são dados por

$$B_l = \frac{2l+1}{2} R^{l+1} \int_0^\pi V(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (103)$$

Caso a densidade superficial de cargas $\sigma(\theta)$ seja especificada, podemos recorrer à equação de descontinuidade do campo elétrico através de interfaces, ou seja,

$$E_{acima}^\perp - E_{abaixo}^\perp = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad (104)$$

$$-\left. \frac{\partial V_{acima}}{\partial r} \right|_{r=R} + \left. \frac{\partial V_{abaixo}}{\partial r} \right|_{r=R} = \frac{\sigma(\theta)}{\epsilon_0} \quad (105)$$

onde consideramos o acima e abaixo da interface como sendo fora e dentro da esfera de raio R , respectivamente. Derivando as equações para o potencial elétrico temos que

$$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1)B_l}{R^{l+2}} P_l(\cos \theta) + \sum_{l=0}^{\infty} A_l l R^{l-1} P_l(\cos \theta) = \frac{\sigma(\theta)}{\epsilon_0}, \quad (106)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} (l+1)A_l R^{l-1} P_l(\cos \theta) + \sum_{l=0}^{\infty} A_l l R^{l-1} P_l(\cos \theta) = \frac{\sigma(\theta)}{\epsilon_0}, \quad (107)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l (2l+1) R^{l-1} P_l(\cos \theta) = \frac{\sigma(\theta)}{\epsilon_0}. \quad (108)$$

Novamente, usando a ortogonalidade, vamos multiplicar a equação anterior por um polinômio de Legendre $P_{l'}(\cos \theta)$ e integrar em todo intervalo polar, ou seja,

$$\sum_{l=0}^{\infty} A_l (2l+1) R^{l-1} \int_0^\pi P_l(\cos \theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^\pi \sigma(\theta) P_{l'}(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (109)$$

Note que, devido a condição de ortogonalidade dos polinômios de Legendre (veja a equação 64), a integral do lado esquerdo da equação anterior é nula para $l \neq l'$ e $\frac{2}{2l+1}$ para $l = l'$. Isto quer dizer que o somatório infinito se reduz apenas a um termo, ou seja,

$$2A_l R^{l-1} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^\pi \sigma(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (110)$$

$$A_l = \frac{1}{2\epsilon_0 R^{l-1}} \int_0^\pi \sigma(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (111)$$

Conseqüentemente, os B_l são dados por

$$B_l = \frac{R^{l+2}}{2\epsilon_0} \int_0^\pi \sigma(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (112)$$

Sendo assim, especificando o potencial elétrico na superfície $V(\theta)$ ou a densidade superficial $\sigma(\theta)$ da superfície da esfera, podemos determinar o potencial elétrico para todos os pontos no espaço.

Exemplo 3. Considere uma distribuição superficial de carga em uma esfera de raio R , que consiste em um hemisfério superior com densidade uniforme σ de carga e um hemisfério inferior com densidade uniforme $-\sigma$ (veja a figura 8 a seguir). Isto é,

$$\sigma(\theta) = \begin{cases} \sigma, & 0 \leq \theta < \pi/2 \\ -\sigma, & \pi/2 < \theta \leq \pi. \end{cases} \quad (113)$$

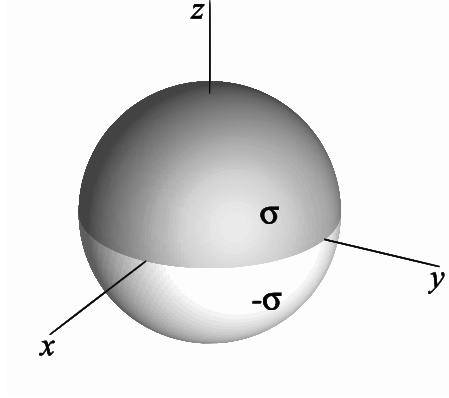


Figura 8: Distribuição superficial de carga em uma superfície esférica de raio R , com um hemisfério superior com densidade uniforme σ e um hemisfério inferior com densidade uniforme $-\sigma$.

Encontre o potencial elétrico para pontos internos e externos a esfera, ou seja, determine $V(r, \theta)$.

Solução: Vamos começar resolvendo os coeficientes A_l . Com efeito,

$$A_l = \frac{1}{2\epsilon_0 R^{l-1}} \int_0^\pi \sigma(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (114)$$

$$A_l = \frac{1}{2\epsilon_0 R^{l-1}} \left[\int_0^{\pi/2} \sigma P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta - \int_{\pi/2}^\pi \sigma P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta \right]. \quad (115)$$

Fazendo $x = \cos \theta$, temos

$$A_l = \frac{\sigma}{2\epsilon_0 R^{l-1}} \left[- \int_1^0 P_l(x) dx + \int_0^{-1} P_l(x) dx \right], \quad (116)$$

$$A_l = \frac{\sigma}{2\epsilon_0 R^{l-1}} \left[\int_0^1 P_l(x) dx - \int_{-1}^0 P_l(x) dx \right]. \quad (117)$$

Podemos agora recorrer à paridade dos polinômios de Legendre, ou seja, $P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$. Se o polinômio for de ordem par, isto é, se l for par, temos que $P_l(-x) = P_l(x)$. Se o polinômio for de ordem ímpar, isto é, se l for ímpar, temos que $P_l(-x) = -P_l(x)$. Portanto, trocando x por $-x$, temos que

$$\int_{-1}^0 P_l(x) dx = \int_1^0 P_l(-x) d(-x) = \int_0^1 (-1)^l P_l(x) dx. \quad (118)$$

Substituindo esta última equação na equação 117, temos que

$$A_l = \frac{\sigma}{2\epsilon_0 R^{l-1}} \left[\int_0^1 P_l(x) dx + \int_0^1 (-1)^l P_l(x) dx \right], \quad (119)$$

$$A_l = \frac{\sigma}{2\epsilon_0 R^{l-1}} [1 - (-1)^l] \left[\int_0^1 P_l(x) dx \right]. \quad (120)$$

Note que, para l para, todos os A_l são nulos, o que nos permite escrever que

$$A_l = \begin{cases} 0, & l \text{ par} \\ \frac{\sigma}{\epsilon_0 R^{l-1}} \int_0^1 P_l(x) dx, & l \text{ ímpar.} \end{cases} \quad (121)$$

Calculando os primeiros 3 termos (veja a tabela 1), temos

$$A_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_0^1 x dx = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{2} \right), \quad (122)$$

$$A_3 = \frac{\sigma}{\epsilon_0 R^2} \int_0^1 \frac{1}{2} (5x^3 - 3x) dx = \frac{\sigma}{\epsilon_0 R^2} \left(-\frac{1}{8} \right), \quad (123)$$

$$A_5 = \frac{\sigma}{\epsilon_0 R^4} \int_0^1 \frac{1}{8} (63x^5 - 70x^3 + 15x) dx = \frac{\sigma}{\epsilon_0 R^2} \left(\frac{1}{16} \right). \quad (124)$$

Com posse dos A_l , podemos encontrar os B_l através de $B_l = A_l R^{2l+1}$. Com efeito,

$$B_1 = \frac{\sigma R^3}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{2} \right), \quad B_3 = \frac{\sigma R^5}{\epsilon_0} \left(-\frac{1}{8} \right) \quad \text{e} \quad B_5 = \frac{\sigma R^7}{\epsilon_0} \left(\frac{1}{16} \right). \quad (125)$$

Portanto, a solução para o potencial elétrico para a distribuição de carga especificada é igual a

$$V(r, \theta) = \begin{cases} A_1 r^1 P_1(\cos \theta) + A_3 r^3 P_3(\cos \theta) + A_5 r^5 P_5(\cos \theta) + \dots, & r \leq R \\ \frac{B_1}{r^2} P_1(\cos \theta) + \frac{B_3}{r^4} P_3(\cos \theta) + \frac{B_5}{r^6} P_5(\cos \theta) + \dots, & r \geq R. \end{cases} \quad (126)$$

$$V(r, \theta) = \begin{cases} \frac{\sigma r}{2\epsilon_0} \left[P_1(\cos \theta) - \frac{1}{4} \left(\frac{r}{R} \right)^2 P_3(\cos \theta) + \frac{1}{8} \left(\frac{r}{R} \right)^4 P_5(\cos \theta) + \dots \right], & r \leq R \\ \frac{\sigma R^3}{2\epsilon_0 r^2} \left[P_1(\cos \theta) - \frac{1}{4} \left(\frac{R}{r} \right)^2 P_3(\cos \theta) + \frac{1}{8} \left(\frac{R}{r} \right)^4 P_5(\cos \theta) + \dots \right], & r \geq R. \end{cases} \quad (127)$$

Para pontos sobre o eixo z , com $z > 0$, temos que $r = z$ e $\theta = 0$. Logo, $P_l(1) = 1$ para todos l . Neste caso, o potencial elétrico para pontos sobre o eixo z é dado por

$$V(z) = \begin{cases} \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{z}{R} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{z}{R} \right)^4 + \dots \right], & z \leq R \\ \frac{\sigma R^3}{2\epsilon_0 z^2} \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{R}{z} \right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{R}{z} \right)^4 + \dots \right], & z \geq R. \end{cases} \quad (128)$$

Este resultado representa a série de potências para a resposta *exata*, obtida pela integração na Lei de Coulomb. Isto é,

$$V(z) = \begin{cases} \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \left(\frac{\sqrt{z^2 + R^2}}{z} - \frac{R}{z} \right), & z \leq R \\ \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \left(\frac{\sqrt{z^2 + R^2}}{z} - 1 \right), & z \geq R. \end{cases} \quad (129)$$

Deixamos como exercício para o leitor fazer esta demonstração.