Licenciatura em Física/IFRN - Campus Natal Central
Eletromagnetismo Clássico I (2019.2)

Prof. Tibério Alves, D.Sc

21 de agosto de 2019

Lista I - Desafiadora - 1ª avaliação

Questão 1. Considere uma cavidade plana circular de raio R com centro coincidindo com a origem de um sistema cartesiano, em um plano infinito carregado no vácuo com densidade uniforme σ.

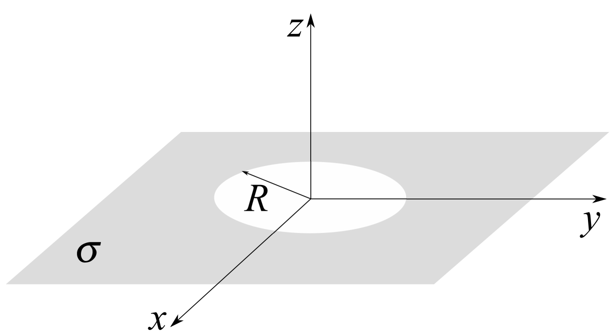

Figura 1: Cavidade plana de raio R em um plano infinito carregado com densidade uniforme σ.

Determine:

(a) O campo elétrico numa posição $z > 0$ no eixo z.

(b) Mostre que o resultado anterior pode ser escrito como a superposição do campo elétrico devido a um disco de raio R, com densidade $-\sigma$, com o campo elétrico de um plano infinito carregado com densidade σ.

Integral dada:

$$\int \frac{xdx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

Questão 2. Seja um disco de raio de raio R com centro coincidindo com a origem de um sistema cartesiano, com metade de sua área preenchida com uma densidade de carga σ e a outra metade carregada com densidade σ. Ou seja,

$$\sigma(\phi) = \begin{cases} -\sigma, & 0 < \phi < \pi \\ \sigma, & \pi < \phi < 2\pi \end{cases}$$

Determine o campo elétrico numa posição $z > 0$ no eixo

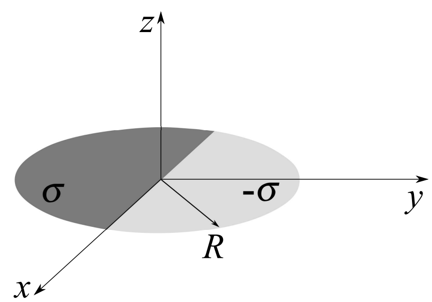

Figura 2: Disco de raio R com densidades σ e $-\sigma$ de carga.

z.
Integral dada:

$$\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \ln(x + \sqrt{x^2+a^2})$$

Questão 3. Seja um fio fino carregado com densidade linear uniforme λ no eixo z, compreendido entre $z = 0$ e $z = L$, como indica a figura 3 a seguir. Considere agora, um ponto P localizado em uma altura z e distante ρ do fio. Os ângulos α_1 e α_2 são definidos de tal modo que

$$\sin\alpha_1 = \frac{L-z}{\sqrt{\rho^2+(L-z)^2}},\ \sin\alpha_2 = \frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}},$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+(L-z)^2}},\ \cos\alpha_2 = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+z^2}}.$$

Considerando os versores $\hat{\rho}$ e $\hat{z}$ em coordenadas cilíndricas:

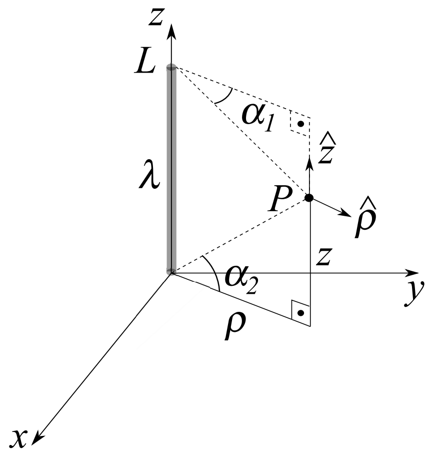

Figura 3: Fio finito carregado com densidade linear λ de comprimento L.

(a) Mostre que o potencial elétrico no ponto P é dado por

$$V(\rho, z) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln\left[\frac{z + \sqrt{z^2+\rho^2}}{z - L + \sqrt{(z-L)^2+\rho^2}}\right].$$

(b) Mostre que o campo elétrico no ponto P é dado por

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0\rho}\left[(\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2)\hat{\rho} + (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)\hat{z}\right].$$

(c) Mostre que, se considerarmos um fio infinito (sem extremidades), o campo elétrico se reduz a

$$\vec{E}(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho}\hat{\rho}.$$

Dica: tome limites para os ângulos α_1 e α_2.

Integrais dadas:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2+a^2})$$

$$\int \frac{xdx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

Questão 4. Seja um cilindro uniformemente carregado com densidade volumétrica ρ_0, com eixo principal coincidindo com o eixo z de um sistema cartesiano, de raio R, compreendido entre $z = -L/2$ e $z = L/2$ tendo comprimento L.

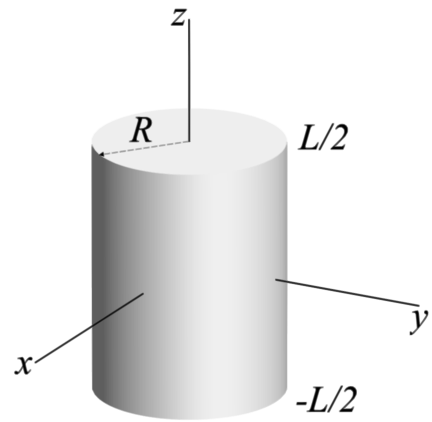

Figura 4: Cilindro uniformemente carregado de comprimento L e raio R.

(a) Mostre que o campo elétrico em um ponto sobre o eixo z, com $z > L/2$, é dado por

$$\vec{E}(z) = \frac{\rho_0}{2\epsilon_0}\left[L - \sqrt{R^2 + \left(z + \frac{L}{2}\right)^2} + \sqrt{R^2 + \left(z - \frac{L}{2}\right)^2}\right]\hat{z}$$

(b) Mostre que no limite de $L^2 \ll R^2 + z^2$, o resultado para o campo elétrico se reduz a

$$\vec{E}(z) = \frac{\rho_0 L}{2\epsilon_0}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]\hat{z}.$$

Tome posteriormente o rigoroso limite de $\lim_{L\to 0} \rho_0 L = \sigma$, com σ sendo a densidade superficial de carga para mostrar que o campo elétrico é de fato um campo devido a um disco carregado uniformemente, ou seja,

$$\vec{E}(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\left[1 - \frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}}\right]\hat{z}.$$

Integrais e aproximações dadas:

$$\int \frac{xdx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$\int \frac{xdx}{(x^2+a^2)^{1/2}} = \sqrt{x^2+a^2}$$

$$(1+x)^{1/2} \approx 1 + \frac{x}{2} \tag{1}$$

Questão 5. Considere um hemisfério de raio R compreendido entre $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$, carregado com densidade superficial uniforme de carga σ, com centro na origem de sistema de coordenadas como indica a figura 5 a seguir.

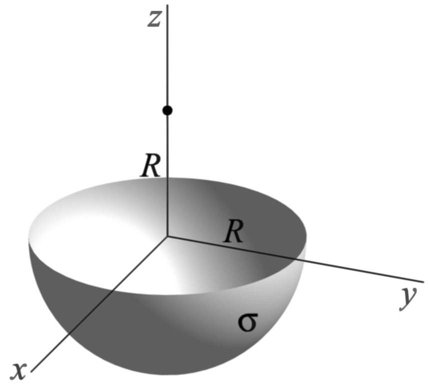

Figura 5: Hemisfério carregado de raio R compreendido entre $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$.

(a) Encontre o potencial elétrico na origem do sistema de coordenadas.

(b) Encontre o campo elétrico em um ponto no eixo z em $z = R$.

Questão 6. Considere um cone reto de raio R e geratriz L, carregado com densidade superficial uniforme de carga σ, com eixo de simetria coincidindo com o eizo z do sistema de coordenadas e com vértice coincidindo na origem deste sistema, como indica a figura 6 a seguir.

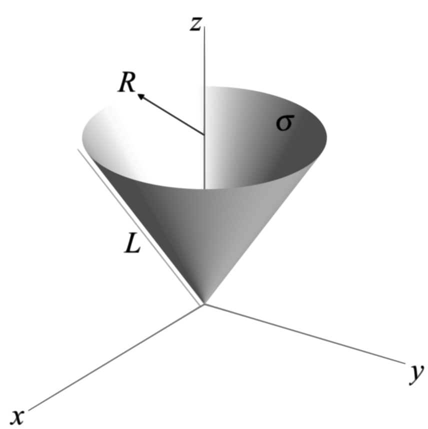

Figura 6: Cone carregado de raio R e geratriz L.

(a) Encontre o potencial elétrico na origem do sistema de coordenadas.

(b) Encontre o potencial elétrico em um ponto no eixo z em $z = \sqrt{L^2 - R^2}$.

Integral dada:

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{a} + \\ - \frac{b}{2a\sqrt{a}} \ln\left[2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + 2ax + b\right]$$