Licenciatura em Física - Campus Natal/Central

Prof. Tibério Alves, D. Sc.

Eletromagnetismo Clássico I - 2019.2

Suplemento I - Coordenadas curvilíneas

30 de julho de 2019

Resumo

Neste material suplementar, vamos deduzir os operadores do cálculo vetorial para coordenadas curvilíneas ortogonais generalizadas e estudar os casos de interesse, ou seja, as coordenadas cilíndricas e esféricas.

1 Coordenadas curvilíneas ortogonais

Considere um conjunto de três curvas caracterizadas pelos parâmetros u, v e w, interceptando-se mutuamente de maneira ortogonal num dado ponto P (veja figura 1 a seguir), definindo a posição $\vec{r}$. Os vetores $\hat{e}_u$, $\hat{e}_v$ e $\hat{e}_w$ são vetores unitários tangentes as curvas mencionadas no ponto P e definem um sistema dextrogiro, de tal forma que definem um volume unitário, ou seja,

$$\hat{e}_u \times \hat{e}_v \cdot \hat{e}_w = 1. \tag{1}$$

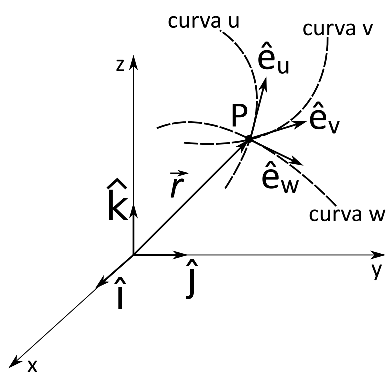

Figura 1: Sistema cartesiano ortogonal e conjunto de curvas ortogonais no ponto P com seus respectivos vetores tangentes unitários.

O vetor posição $\vec{r}$ pode ser escrito tanto em termos dos versores cartesianos, que comumente é dado por $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{z}$, como também pelos parâmetros u, v e w, isto é,

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v, w). \tag{2}$$

Perceba que se derivarmos $\partial\vec{r}/\partial u$, encontraremos um vetor tangente a curva definida pelo parâmetro u. O mesmo para os parâmetros v e w. Sendo assim, para encontrarmos o vetor tangente unitário, basta dividirmos essa quantidade pela sua norma $|\partial\vec{r}/\partial u|$, ou seja,

$$\hat{e}_u = \frac{\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u}}{\left|\dfrac{\partial\vec{r}}{\partial u}\right|}, \tag{3}$$

onde, por simplicidade, definiremos $h_u = |\partial\vec{r}/\partial u|$. Sendo assim,

$$\hat{e}_u = \frac{1}{h_u}\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} \qquad \hat{e}_v = \frac{1}{h_v}\frac{\partial\vec{r}}{\partial v} \qquad \hat{e}_w = \frac{1}{h_w}\frac{\partial\vec{r}}{\partial w}. \tag{4}$$

Vale notar neste momento que os parâmetros u, v e w não são necessariamente o comprimento ao longo de suas respectivas curvas, como acontece nas coordenadas cartesianas ortogonais. Sendo assim, vamos nos referir a uma função s_u (função unicamente do parâmetro u), por exemplo, para tratar comprimentos ao longo da curva com parâmetro u. Por outro lado, podemos escrever também o vetor unitário no ponto P tangente a curva u da seguinte maneira

$$\hat{e}_u = \frac{\partial\vec{r}}{\partial s_u}, \tag{5}$$

ou seja, derivando $\vec{r}$ em relação ao comprimento na curva u. Aplicando a regra da cadeia, temos que

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial s_u}\frac{ds_u}{du}. \tag{6}$$

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u} = \hat{e}_u\frac{ds_u}{du}. \tag{7}$$

Comparando a equação 7 com a equação 4, chegamos a conclusão que

$$h_u\hat{e}_u = \frac{ds_u}{du}\hat{e}_u, \tag{8}$$

de tal maneira que

$$ds_u = h_u du, \tag{9}$$

e analogamente para os demais parâmetros

$$ds_v = h_v dv \tag{10}$$

$$ds_w = h_w dw. \tag{11}$$

1.1 Gradiente

Podemos analisar o conceito de gradiente de uma função de várias variáveis como uma extensão da definição de diferencial exata de uma função de uma variável, por exemplo, $f(x)$, ou seja, $df = \frac{df}{dx}dx$. Para uma função φ que dependa de mais de uma variável (campo escalar), temos que

$$\nabla\varphi \cdot d\vec{r} = d\varphi, \tag{12}$$

onde $d\varphi$ é a variação do campo escalar φ entre $\vec{r}$ e $\vec{r} + d\vec{r}$, ou seja, $\varphi(\vec{r} + d\vec{r}) - \varphi(\vec{r})$, com $d\vec{r}$ sendo um vetor de comprimento infinitesimal. $\nabla\varphi$ é o gradiente do campo escalar φ que indica a direção e sentido da maior variação do campo escalar φ no espaço com seu módulo indicando a intensidade desta variação.

O vetor $d\vec{r}$, que em coordenadas cartesianas é facilmente reconhecido por $d\vec{r} = dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{z}$, toma a seguinte expressão geral para um conjunto ortogonal

$$d\vec{r} = ds_u\hat{e}_u + ds_v\hat{e}_v + ds_w\hat{e}_w, \tag{13}$$

$$d\vec{r} = h_u du\ \hat{e}_u + h_v dv\ \hat{e}_v + h_w dw\ \hat{e}_w. \tag{14}$$

O gradiente de φ pode ser escrito em termos de seus componentes nas direções definidas pelos versores $\hat{e}_u$, $\hat{e}_v$ e $\hat{e}_w$ da seguinte maneira

$$\nabla\varphi = (\nabla\varphi)_u\ \hat{e}_u + (\nabla\varphi)_v\ \hat{e}_v + (\nabla\varphi)_w\ \hat{e}_w, \tag{15}$$

e calculando seu produto escalar com a equação 14 temos

$$\nabla\varphi\cdot d\vec{r} = (\nabla\varphi)_u h_u du + (\nabla\varphi)_v h_v dv + (\nabla\varphi)_w h_w dw. \tag{16}$$

Por outro lado, de forma geral, a diferencial exata de um campo escalar φ em relação um conjunto de variáveis, por exemplo, u, v e w, é dada por

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv + \frac{\partial\varphi}{\partial w}dw, \tag{17}$$

o que nos permite concluir que

$$(\nabla\varphi)_u = \frac{1}{h_u}\frac{\partial\varphi}{\partial u} \qquad (\nabla\varphi)_v = \frac{1}{h_v}\frac{\partial\varphi}{\partial v} \qquad (\nabla\varphi)_w = \frac{1}{h_w}\frac{\partial\varphi}{\partial w}, \tag{18}$$

chegando a expressão geral para o gradiente em coordenadas curvilíneas ortogonais

$$\nabla\varphi = \frac{1}{h_u}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\hat{e}_u + \frac{1}{h_v}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\hat{e}_v + \frac{1}{h_w}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\hat{e}_w. \tag{19}$$

O operador nabla pode ser visto através da seguinte operação

$$\nabla = \frac{\hat{e}_u}{h_u}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\hat{e}_v}{h_v}\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\hat{e}_w}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}. \tag{20}$$

1.2 Divergência

Vamos começar o cálculo da divergência reconhecendo que um campo vetorial $\vec{f}$ pode ser escrito, em termos de seus componentes nas direções definidas pelos versores $\hat{e}_u$, $\hat{e}_v$ e $\hat{e}_w$, da seguinte maneira

$$\vec{f} = f_u\hat{e}_u + f_v\hat{e}_v + f_w\hat{e}_w. \tag{21}$$

Portanto, calculamos a divergência através do seguinte produto escalar

$$\nabla\cdot\vec{f} = \left(\frac{\hat{e}_u}{h_u}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\hat{e}_v}{h_v}\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\hat{e}_w}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}\right)\cdot\left(f_u\hat{e}_u + f_v\hat{e}_v + f_w\hat{e}_w\right). \tag{22}$$

Para reduzir o esforço algébrico, vamos calcular apenas a atuação do operador nabla na componente vetorial u de $\vec{f}$, ou seja, $\nabla\cdot(f_u\hat{e}_u)$, e depois generalizarmos para as demais parcelas do cálculo. O primeiro termo é

$$\frac{\hat{e}_u}{h_u}\cdot\frac{\partial}{\partial u}(f_u\hat{e}_u) = \frac{\hat{e}_u}{h_u}\cdot\left[\hat{e}_u\frac{\partial f_u}{\partial u} + f_u\frac{\partial\hat{e}_u}{\partial u}\right], \tag{23}$$

$$\frac{\hat{e}_u}{h_u}\cdot\frac{\partial}{\partial u}(f_u\hat{e}_u) = \frac{\hat{e}_u\cdot\hat{e}_u}{h_u}\frac{\partial f_u}{\partial u} + \frac{f_u}{h_u}\hat{e}_u\cdot\frac{\partial\hat{e}_u}{\partial u}, \tag{24}$$

$$\frac{\hat{e}_u}{h_u}\cdot\frac{\partial}{\partial u}(f_u\hat{e}_u) = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f_u}{\partial u}, \tag{25}$$

onde usamos $\hat{e}_u\cdot\hat{e}_u = 1$ e $\hat{e}_u\cdot\frac{\partial\hat{e}_u}{\partial u} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}(\hat{e}_u\cdot\hat{e}_u) = 0$. Vamos agora calcular o próximo termo,

$$\frac{\hat{e}_v}{h_v}\cdot\frac{\partial}{\partial v}(f_u\hat{e}_u) = \frac{\hat{e}_v}{h_v}\cdot\left[\hat{e}_u\frac{\partial f_u}{\partial v} + f_u\frac{\partial\hat{e}_u}{\partial v}\right] \tag{26}$$

$$\frac{\hat{e}_v}{h_v}\cdot\frac{\partial}{\partial v}(f_u\hat{e}_u) = \frac{\hat{e}_v\cdot\hat{e}_u}{h_v}\frac{\partial f_u}{\partial v} + \frac{f_u}{h_v}\hat{e}_v\cdot\frac{\partial\hat{e}_u}{\partial v}, \tag{27}$$

$$\frac{\hat{e}_v}{h_v}\cdot\frac{\partial}{\partial v}(f_u\hat{e}_u) = \frac{f_u}{h_v}\hat{e}_v\cdot\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{h_u}\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\right), \tag{28}$$

$$\frac{\hat{e}_v}{h_v}\cdot\frac{\partial}{\partial v}(f_u\hat{e}_u) = \frac{f_u}{h_v}\hat{e}_v\cdot\left[\frac{1}{h_u}\frac{\partial^2\vec{r}}{\partial u\partial v} + \frac{\partial\vec{r}}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{h_u}\right)\right], \tag{29}$$

$$\frac{\hat{e}_v}{h_v}\cdot\frac{\partial}{\partial v}(f_u\hat{e}_u) = \frac{f_u}{h_v h_u}\hat{e}_v\cdot\frac{\partial}{\partial v}(\hat{e}_v h_v) + \cancelto{0}{\frac{f_u}{h_v h_u}\hat{e}_v\cdot\hat{e}_u h_u\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{h_u}\right)}, \tag{30}$$

$$\frac{\hat{e}_v}{h_v}\cdot\frac{\partial}{\partial v}(f_u\hat{e}_u) = \frac{f_u}{h_v h_u}\hat{e}_v\cdot\frac{\partial}{\partial u}(\hat{e}_v h_v), \tag{31}$$

$$\frac{\hat{e}_v}{h_v}\cdot\frac{\partial}{\partial v}(f_u\hat{e}_u) = \frac{f_u}{h_v h_u}\hat{e}_v\cdot\hat{e}_v\frac{\partial h_v}{\partial u} + \cancelto{0}{\frac{f_u}{h_v}\hat{e}_v\cdot\frac{\partial\hat{e}_v}{\partial u}}, \tag{32}$$

$$\frac{\hat{e}_v}{h_v}\cdot\frac{\partial}{\partial v}(f_u\hat{e}_u) = \frac{f_u}{h_v h_u}\frac{\partial h_v}{\partial u}, \tag{33}$$

o que, de maneira análoga, nos permite afirmar que

$$\frac{\hat{e}_w}{h_w}\cdot\frac{\partial}{\partial v}(f_u\hat{e}_u) = \frac{f_u}{h_w h_u}\frac{\partial h_w}{\partial u}. \tag{34}$$

Juntando todas as parcelas, o cálculo para o diverte da componente u do campo vetorial $\vec{f}$ é dado por

$$\nabla\cdot(f_u\hat{e}_u) = \frac{1}{h_u}\frac{\partial f_u}{\partial u} + \frac{f_u}{h_v h_u}\frac{\partial h_v}{\partial u} + \frac{f_u}{h_w h_u}\frac{\partial h_w}{\partial u}. \tag{35}$$

Esta última equação pode ser compactada por um regra da cadeia, ou seja,

$$\nabla\cdot(f_u\hat{e}_u) = \frac{1}{h_u h_v h_w}\frac{\partial}{\partial u}\left(f_u h_v h_w\right), \tag{36}$$

o que de forma análoga nos permite escrever a divergência para os demais componentes do campo vetorial $\vec{f}$

$$\nabla\cdot(f_v\hat{e}_v) = \frac{1}{h_u h_v h_w}\frac{\partial}{\partial v}\left(f_v h_u h_w\right), \tag{37}$$

$$\nabla\cdot(f_w\hat{e}_w) = \frac{1}{h_u h_v h_w}\frac{\partial}{\partial w}\left(f_w h_u h_v\right). \tag{38}$$

Sendo assim, a divergência em coordenadas curvilíneas ortogonais generalizadas é dada por

$$\nabla\cdot\vec{f} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(f_u h_v h_w\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(f_v h_u h_w\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(f_w h_u h_v\right)\right]. \tag{39}$$

1.3 Rotacional

Vamos começar reconhecendo que o rotacional de um campo vetorial $\vec{f}$, em coordenadas curvilíneas ortogonais, é dado por

$$\nabla\times\vec{f} = \left(\frac{\hat{e}_u}{h_u}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\hat{e}_v}{h_v}\frac{\partial}{\partial v} + \frac{\hat{e}_w}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}\right)\times\left(f_u\hat{e}_u + f_v\hat{e}_v + f_w\hat{e}_w\right). \tag{40}$$

Para simplificar o trabalho algébrico, vamos calcular inicialmente apenas a componente na direção de $\hat{e}_u$, ou seja, os termos provenientes de

$$\left(\frac{\hat{e}_v}{h_v}\frac{\partial}{\partial v}\right)\times\left(f_w\hat{e}_w\right), \tag{41}$$

$$\left(\frac{\hat{e}_w}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}\right)\times\left(f_v\hat{e}_v\right). \tag{42}$$

Calculando inicialmente o primeiro termo temos

$$\left(\frac{\hat{e}_v}{h_v}\frac{\partial}{\partial v}\right)\times(f_w\hat{e}_w)=\frac{\hat{e}_v}{h_v}\times\left[\hat{e}_w\frac{\partial f_w}{\partial v}+f_w\frac{\partial \hat{e}_w}{\partial v}\right], \tag{43}$$

$$\left(\frac{\hat{e}_v}{h_v}\frac{\partial}{\partial v}\right)\times(f_w\hat{e}_w)=\frac{\hat{e}_v}{h_v}\times\hat{e}_w\frac{\partial f_w}{\partial v}+\frac{f_w}{h_v}\hat{e}_v\times\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{h_w}\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}\right), \tag{44}$$

$$\left(\frac{\hat{e}_v}{h_v}\frac{\partial}{\partial v}\right)\times(f_w\hat{e}_w)=\frac{\hat{e}_u}{h_v}\frac{\partial f_w}{\partial v}+\frac{f_w}{h_v}\hat{e}_v\times\left[-\frac{1}{h_w^2}\frac{\partial \vec{r}}{\partial w}+\frac{1}{h_w}\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial w\partial v}\right], \tag{45}$$

$$\left(\frac{\hat{e}_v}{h_v}\frac{\partial}{\partial v}\right)\times(f_w\hat{e}_w)=\frac{\hat{e}_u}{h_v}\frac{\partial f_w}{\partial v}+\frac{f_w}{h_v}\hat{e}_v\times\left[-\frac{\hat{e}_w}{h_w}+\frac{1}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}(h_v\hat{e}_v)\right], \tag{46}$$

$$\left(\frac{\hat{e}_v}{h_v}\frac{\partial}{\partial v}\right)\times(f_w\hat{e}_w)=\frac{\hat{e}_u}{h_v}\frac{\partial f_w}{\partial v}+\frac{f_w}{h_v}\hat{e}_v\times\left[-\frac{\hat{e}_w}{h_w}+\frac{h_v}{h_w}\frac{\partial \hat{e}_v}{\partial w}+\frac{\hat{e}_v}{h_w}\frac{\partial h_v}{\partial w}\right], \tag{47}$$

$$\left(\frac{\hat{e}_v}{h_v}\frac{\partial}{\partial v}\right)\times(f_w\hat{e}_w)=\left(\frac{1}{h_v}\frac{\partial f_w}{\partial v}-\frac{f_w}{h_vh_w}\right)\hat{e}_u, \tag{48}$$

onde usamos o fato que $\hat{e}_v\times\hat{e}_w=\hat{e}_u$, $\hat{e}_v\times\hat{e}_v=0$ e $\hat{e}_v\times\dfrac{\partial\hat{e}_v}{\partial w}=0$.

Calculando o segundo termo[1] temos

$$\left(\frac{\hat{e}_w}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}\right)\times(f_v\hat{e}_v)=\frac{\hat{e}_w}{h_w}\times\left[\hat{e}_v\frac{\partial f_v}{\partial w}+f_v\frac{\partial \hat{e}_v}{\partial w}\right], \tag{49}$$

$$\left(\frac{\hat{e}_w}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}\right)\times(f_v\hat{e}_v)=\left(-\frac{1}{h_w}\frac{\partial f_v}{\partial w}+\frac{f_v}{h_wh_v}\right)\hat{e}_u, \tag{50}$$

de tal forma que o componente vetorial u do rotacional de $\vec{f}$ é dada por

$$\left(\nabla\times\vec{f}\right)_u\hat{e}_u=\left(\frac{f_v}{h_wh_v}-\frac{f_w}{h_vh_w}+\frac{1}{h_v}\frac{\partial f_w}{\partial v}-\frac{1}{h_w}\frac{\partial f_v}{\partial w}\right)\hat{e}_u, \tag{51}$$

$$\left(\nabla\times\vec{f}\right)_u\hat{e}_u=\frac{1}{h_vh_w}\left[\frac{\partial}{\partial v}(h_wf_w)-\frac{\partial}{\partial w}(h_vf_v)\right]\hat{e}_u, \tag{52}$$

e de forma análoga para as demais componentes do rotacional,

$$\left(\nabla\times\vec{f}\right)_v\hat{e}_v=\frac{1}{h_uh_w}\left[\frac{\partial}{\partial w}(h_uf_u)-\frac{\partial}{\partial u}(h_wf_w)\right]\hat{e}_v, \tag{53}$$

$$\left(\nabla\times\vec{f}\right)_w\hat{e}_w=\frac{1}{h_uh_v}\left[\frac{\partial}{\partial u}(h_vf_v)-\frac{\partial}{\partial v}(h_uf_u)\right]\hat{e}_w, \tag{54}$$

Concluímos então que o rotacional de um campo vetorial $\vec{f}$ em coordenadas curvilíneas ortogonais é dado por

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{f}=\frac{1}{h_vh_w}\left[\frac{\partial}{\partial v}(h_wf_w)-\frac{\partial}{\partial w}(h_vf_v)\right]\hat{e}_u+\frac{1}{h_uh_w}\left[\frac{\partial}{\partial w}(h_uf_u)-\frac{\partial}{\partial u}(h_wf_w)\right]\hat{e}_v+\\ \frac{1}{h_uh_v}\left[\frac{\partial}{\partial u}(h_vf_v)-\frac{\partial}{\partial v}(h_uf_u)\right]\hat{e}_w.\end{aligned} \tag{55}$$

1.4 O Laplaciano

O Laplaciano pode ser determinado através da expressão da divergência. Basta fazer $\vec{f}=\nabla\varphi$ na expressão 39. Ou seja,

$$\nabla^2\varphi=\frac{1}{h_uh_vh_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_vh_w}{h_u}\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_uh_w}{h_v}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_uh_v}{h_w}\frac{\partial\varphi}{\partial w}\right)\right]. \tag{56}$$

[1] Deixo o leitor fazer o desenvolvimento.

2 Coordenadas cilíndricas

Em coordenadas cilíndricas são representadas pelas quantidades ρ, ϕ e z e seus respectivos versores $\hat{\rho}$, $\hat{\phi}$ e $\hat{z}$ (veja a figura 2 a seguir).

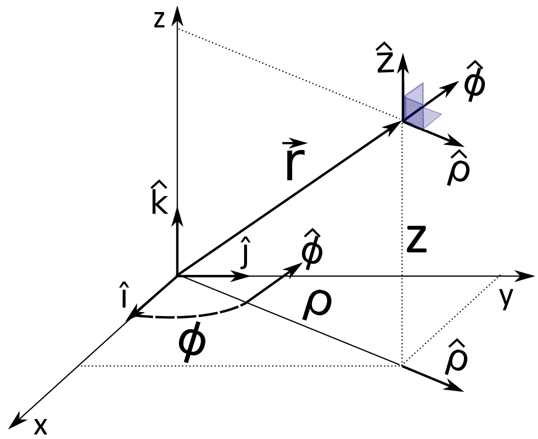

Figura 2: Sistema de coordenadas cilíndricas.

Vamos começar calculando os parâmetros h_ρ, h_ϕ e h_z. O vetor posição é $\vec{r} = \vec{r}(\rho, \phi, z)$ dado por

$$\vec{r} = \rho \cos\phi \; \hat{\imath} + \rho \sin\phi \; \hat{\jmath} + z\hat{z}, \tag{57}$$

o que fornece os seguintes parâmetros

$$h_\rho = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}\right| = \left|\cos\phi \; \hat{\imath} + \sin\phi \; \hat{\jmath}\right| = 1, \tag{58}$$

$$h_\phi = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \phi}\right| = \left|-\rho \sin\phi \; \hat{\imath} + \rho \cos\phi \; \hat{\jmath}\right| = \rho, \tag{59}$$

$$h_z = \left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial z}\right| = |\hat{z}| = 1. \tag{60}$$

Usando estas expressões e os resultados obtidos nas equações 19, 39, 55 e 56, podemos escrever o gradiente, divergente, rotacional e Laplaciano em coordenadas cilíndricas. Veja a seguir.

$$\boxed{\nabla\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \varphi}{\partial \phi}\hat{\phi} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\hat{z}}, \tag{61}$$

$$\nabla \cdot \vec{f} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho f_\rho\right) + \frac{\partial f_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho f_z\right)\right], \tag{62}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{f} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho f_\rho\right) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial f_z}{\partial z}}, \tag{63}$$

$$\nabla \times \vec{f} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(f_z) - \frac{\partial}{\partial z}(\rho f_\phi)\right]\hat{\rho} + \left[\frac{\partial}{\partial z}(f_\rho) - \frac{\partial}{\partial \rho}(f_z)\right]\hat{\phi} + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho f_\phi) - \frac{\partial}{\partial \phi}(f_\rho)\right]\hat{z}, \tag{64}$$

$$\boxed{\nabla \times \vec{f} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial f_z}{\partial \phi} - \frac{\partial f_\phi}{\partial z}\right)\hat{\rho} + \left(\frac{\partial f_\rho}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial \rho}\right)\hat{\phi} + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho f_\phi) - \frac{\partial f_\rho}{\partial \phi}\right)\hat{z}}, \tag{65}$$

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial \varphi}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\right], \tag{66}$$

$$\boxed{\nabla^2\varphi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial \varphi}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2}\right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}}. \tag{67}$$

2.1 Elementos de volume e área

Para um volume infinitesimal dV, defino pelas curvas u, v e w, temos que

$$dV = ds_u ds_v ds_w. \tag{68}$$

Usando as equações 9, 10 e 11 para as coordenadas cilíndricas, podemos escrever que o elemento de volume infinitesimal nestas coordenadas é dado por

$$dV = h_u du h_v dv h_w dw = h_\rho h_\phi h_z d\rho d\phi dz = \rho d\rho d\phi dz. \tag{69}$$

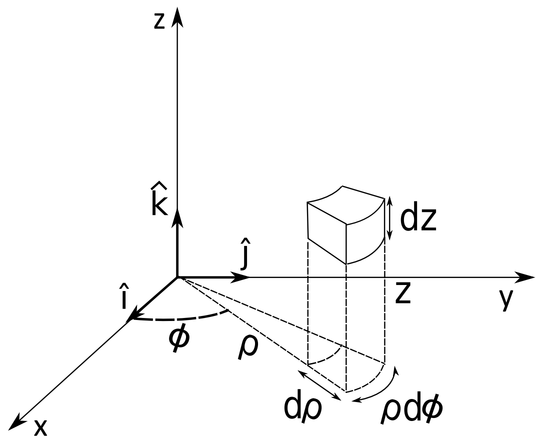

Figura 3: Sistema de coordenadas cilíndricas.

Os elementos de área são obtidos fazendo um dos incrementos diferenciais ds igual a 1 e sua respectiva coordenada uma constante na equação acima. Por exemplo, para uma superfície cilíndrica com eixo de simetria coincidindo com o eixo z, $\rho = R$, com R sendo o raio do cilindro e $d\rho = 1$. Neste caso, o elemento de área é dado por

$$da_1 = R d\phi dz. \tag{70}$$

Para uma superfície defina por qualquer plano onde $z = cte$, $dz = 1$, temos que o elemento de área é dado por

$$da_2 = \rho d\rho d\phi. \tag{71}$$

Para uma superfície defina por qualquer plano onde $\phi = cte$, $\rho d\phi = 1$, temos que o elemento de área é dado por

$$da_3 = d\rho dz. \tag{72}$$

3 Coordenadas esféricas

Deixemos como exercício para o leitor mostrar que os parâmetros h_r, h_θ e h_ϕ são dados por

$$h_r = 1 \quad h_\theta = r \quad h_\phi = r \sin\theta, \tag{73}$$

e que podemos escrever o gradiente, divergente, rotacional e Laplaciano como se segue,

$$\boxed{\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi}\hat{\phi}}, \tag{74}$$

$$\boxed{\nabla\cdot\vec{f} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 f_r\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(f_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f_\phi}{\partial\phi}}, \tag{75}$$

$$\boxed{\nabla \times \vec{f} = \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(f_\phi \sin\theta) - \frac{\partial f_\theta}{\partial\phi}\right]\hat{r} + \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial f_r}{\partial\phi} - \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(rf_\phi)\right]\hat{\theta} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rf_\theta) - \frac{\partial f_r}{\partial\theta}\right]\hat{\phi}}, \tag{76}$$

$$\boxed{\nabla^2\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}}. \tag{77}$$

3.1 Elementos de volume e área

De forma análoga ao que foi feito em coordenadas cilíndricas, mostre que o volume infinitesimal dV em coordenadas esféricas (veja a figura 4 a seguir) é dado por

$$dV = h_u h_v h_w du dv dw = h_r h_\theta h_\phi dr d\theta d\phi = r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi, \tag{78}$$

e que os elementos de área são,

- Para superfície esférica de raio R, $dr = 1$, $da_1 = R^2 \sin\theta d\theta d\phi$.
- Para cones definidos por $\theta = cte$, $rd\theta = 1$, $da_2 = r\sin\theta dr d\phi$.
- Para planos definidos por $\phi = cte$, $r\sin\theta = 1$, $da_3 = r dr d\theta$.

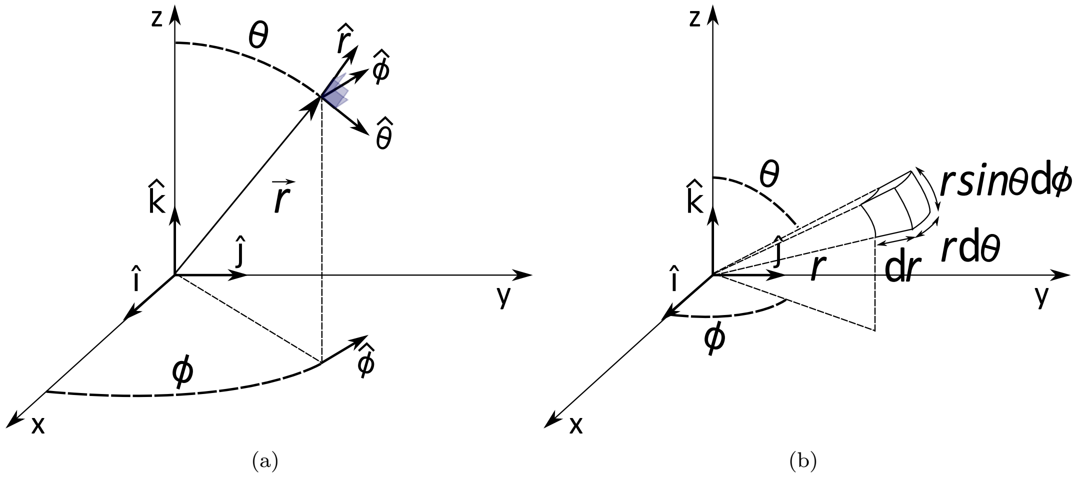

Figura 4: Em (a) temos as coordenadas esféricas e seus versores. Em (b) temos o elemento infinitesimal de volume em coordenadas esféricas.