MNPEF - Polo IFRN - Campus Natal/Central

Prof. Tibério Alves, D. Sc.

Eletromagnetismo Clássico I - 2019.2

Suplemento II - Os polinômios de Legendre

16 de setembro de 2019

Resumo

Neste material suplementar, vamos estudar a equação de Legendre e encontrar suas soluções usando o método de séries de potência. Exibiremos também, algumas propriedades importantes dos polinômios de Legendre.

1 Os polinômios de Legendre

1.1 Solução da equação de Legendre

A equação de Legendre surge quando usamos a mudança de variável $x = \cos\theta$ na equação polar proveniente da equação de Laplace em coordenadas esféricas, ou seja,

$$\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \Theta\sin\theta\lambda = 0, \tag{1}$$

com λ sendo a constante de separação. Perceba que esta equação pode também ser escrita como

$$\sin\theta\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \cos\theta\frac{d\Theta}{d\theta} + \Theta\sin\theta\lambda = 0, \tag{2}$$

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \cot\theta\frac{d\Theta}{d\theta} + \Theta\lambda = 0. \tag{3}$$

Podemos escrever esta equação na variável x usando $x = \cos\theta$. Para isso, note que

$$\frac{d^2}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta}\frac{d}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{dx}{d\theta}\frac{d}{dx}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(-\sin\theta\frac{d}{dx}\right) \tag{4}$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2} = -\cos\theta\frac{d}{dx} - \sin\theta\frac{d}{d\theta}\frac{d}{dx} = -\cos\theta\frac{d}{dx} - \sin\theta\left(-\sin\theta\frac{d}{dx}\right)\frac{d}{dx} \tag{5}$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2} = -\cos\theta\frac{d}{dx} + \sin^2\theta\frac{d^2}{dx^2} \tag{6}$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2} = -x\frac{d}{dx} + (1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}. \tag{7}$$

Note também que

$$\cot\theta\frac{d}{d\theta} = \cot\theta\left(-\sin\theta\frac{d}{dx}\right) = -x\frac{d}{dx}. \tag{8}$$

Portanto, na variável x, a equação 3 se torna

$$-x\frac{d\Theta(x)}{dx}+(1-x^2)\frac{d^2\Theta(x)}{dx^2}-x\frac{d\Theta(x)}{dx}+\Theta\lambda=0, \tag{9}$$

$$\boxed{(1-x^2)\frac{d^2\Theta(x)}{dx^2}-2x\frac{d\Theta(x)}{dx}+\Theta(x)\lambda=0}. \tag{10}$$

Esta última equação é chamada de **equação de Legendre**[1].

A solução da equação de Legendre pode ser obtida a partir do método de **séries de potências**, que consiste na suposição que a solução $\Theta(x)$ possa ser escrita como uma série de potência do tipo

$$\Theta(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k, \tag{11}$$

onde devemos determinar os coeficientes a_k da série. Calculando as derivadas da série temos

$$\frac{d\Theta(x)}{dx}=\sum_{k=0}^{\infty}ka_kx^{k-1}, \tag{12}$$

$$\frac{d^2\Theta(x)}{dx^2}=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)a_kx^{k-2}. \tag{13}$$

Podemos deslocar esta última série em dois termos visto que os dois primeiros termos são nulos. Desta forma, fazemos $k\to k+2$, o que conduz a

$$\frac{d^2\Theta(x)}{dx^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k. \tag{14}$$

Substituindo as equações 11, 12 e 14 na equação de Legendre 10, temos que

$$\frac{d^2\Theta(x)}{dx^2}-x^2\frac{d^2\Theta(x)}{dx^2}-2x\frac{d\Theta(x)}{dx}+\Theta(x)\lambda=0. \tag{15}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k-\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)a_kx^k-2\sum_{k=0}^{\infty}ka_kx^k+\lambda\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k=0 \tag{16}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[(k+2)(k+1)a_{k+2}-k(k-1)a_k-2ka_k+\lambda a_k\right]x^k=0 \tag{17}$$

Para este último polinômio ser identicamente nulo, todos os coeficientes (termo entre colchetes) devem ser nulos, ou seja,

$$(k+2)(k+1)a_{k+2}-k(k-1)a_k-2ka_k+\lambda a_k=0, \tag{18}$$

$$a_{k+2}=\frac{k(k+1)-\lambda}{(k+2)(k+1)}a_k. \tag{19}$$

Esta última equação mostra que os coeficientes da série/solução obedecem a uma **relação de recorrência**, em que os coeficientes posteriores dependem de seus anteriores. Além disso, temos duas séries distintas, pois uma série pode começar por a_0, sendo uma série de termos pares, ou começar por a_1, sendo uma série de termos ímpares.

Partindo de a_0, temos

$$k=0\to a_2=-\frac{\lambda}{2}a_0,$$

$$k=2\to a_4=\frac{6-\lambda}{12}a_2=-\frac{\lambda(6-\lambda)}{24}a_0,$$

[1]Adrien-Marie Legendre, matemático francês (1752-1833).

$$k=4 \rightarrow a_6 = \frac{20-\lambda}{30}a_4 = -\frac{\lambda(6-\lambda)(20-\lambda)}{720}a_0.$$
$$\vdots$$

Partindo de a_1, temos

$$k=1 \rightarrow a_3 = \frac{2-\lambda}{6}a_1,$$
$$k=3 \rightarrow a_5 = \frac{12-\lambda}{20}a_3 = \frac{(2-\lambda)(12-\lambda)}{120}a_1,$$
$$k=5 \rightarrow a_7 = \frac{30-\lambda}{42}a_5 = \frac{(30-\lambda)(2-\lambda)(12-\lambda)}{5040}a_1.$$
$$\vdots$$

Portanto, a nossa solução para $\Theta(x)$ é dada por

$$\begin{aligned}\Theta(x) = a_0 &\left[1 - \frac{\lambda}{2}x^2 - \frac{\lambda(6-\lambda)}{24}x^4 - \frac{\lambda(6-\lambda)(20-\lambda)}{720}x^6 + ...\right] \\ + a_1 &\left[x + \frac{2-\lambda}{6}x^3 + \frac{(2-\lambda)(12-\lambda)}{120}x^5 + \frac{(30-\lambda)(2-\lambda)(12-\lambda)}{5040}x^7 + ...\right].\end{aligned} \tag{20}$$

Contudo, devemos testar se estas séries obedecem ao critério de convergência fazendo com que a solução seja fisicamente aceitável. Um dos critérios mais comuns para teste de convergência é o **teste da razão**, expresso pelo seguinte limite

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|u_{k+1}|}{|u_k|} < 1, \tag{21}$$

com $u_k = a_k x^k$. No nosso caso,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k(k+1)-\lambda}{(k+1)(k+2)} \frac{x^{k+2}}{x^k} = x^2, \tag{22}$$

Como $x = \cos\theta$, a série obedece ao critério de convergência, exceto quando $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, fazendo $x^2 = 1$, não obedecendo ao teste. Somos então obrigados a fazer imposições a respeito da constante λ para que a série seja convergente também para esses pontos. Perceba que se λ for escrito como um inteiro positivo vezes seu sucessor, ou seja, $\lambda = l(l+1)$, o numerador da razão no teste se anula para um determinado valor de l. Isto faz com que a série que antes era infinita, passe a ser finita. A relação de recorrência fica agora da seguinte forma,

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1)-l(l+1)}{(k+2)(k+1)}a_k. \tag{23}$$

Por exemplo, para $l = 2$, teremos na série de termos pares apenas os termos a_0 e a_2 diferentes de zero, visto que

$$a_4 = \frac{2(2+1)-2(2+1)}{(2+2)(2+1)}a_2 = 0, \tag{24}$$

$$a_4 = 0, \tag{25}$$

e consequentemente para todos os demais, $a_4 = a_6 = ... = 0$. Nossa série se torna um polinômio de ordem l, digamos $P_l(x)$. Para $l = 2$, temos

$$P_2(x) = a_0\left(1 - \frac{2(2+1)}{2}x^2\right), \tag{26}$$

$$P_2(x) = a_0\left(1 - 3x^2\right). \tag{27}$$

Para todos os polinômios, usaremos o critério $P_l(1) = 1$. Sendo assim, no caso descrito para $l = 2$, temos $a_0 = -1/2$, o que nos permite escrever

$$P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1). \tag{28}$$

Para $l = 3$, teremos na série de termos ímpares apenas os termos a_1 e a_3 diferentes de zero, visto que

$$a_5 = \frac{3(3+1) - 3(3+1)}{(3+2)(3+1)} a_3 = 0, \tag{29}$$

$$a_5 = 0, \tag{30}$$

e consequentemente para todos os demais, $a_5 = a_7 = ... = 0$. Para $P_3(x)$, temos

$$P_3(x) = a_1 \left[x + \frac{2 - 3(3+1)}{6} x^3 \right], \tag{31}$$

$$P_3(x) = a_1 \left[x - \frac{5}{3} x^3 \right]. \tag{32}$$

Usando o critério $P_l(1) = 1$, temos que $a_0 = -3/2$, o que nos permite escrever

$$P_3(\cos\theta) = \frac{1}{2} \left(5\cos^3\theta - 3\cos\theta \right). \tag{33}$$

O conjunto de polinômios $P_l(\cos\theta)$ é chamado de **polinômios de Legendre**. Veja na tabela 1 a seguir os primeiros 5 polinômios de Legendre.

Tabela 1: Polinômios de Legendre

l	$P_l(\cos\theta)$
0	1
1	$\cos\theta$
2	$\frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1)$
3	$\frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta)$
4	$\frac{1}{8}(35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta + 3)$

1.2 Propriedades dos polinômios de Legendre

Uma propriedade importante dos polinômios de Legendre é que eles formam um **conjunto completo** de funções que são os elementos base de um espaço vetorial. Logo, eles são ortogonais entre si para um produto interno. Este produto interno seria a integração do produto de funções no intervalo de $P_l(x)$. A ortogonalidade garante que

$$\int_{-1}^{1} P_l(x) P_{l'}(x) dx = \begin{cases} 0, \ l \neq l' \\ \dfrac{2}{2l+1}, \ l = l' \end{cases} \tag{34}$$

ou

$$\int_{0}^{\pi} P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta) \sin\theta d\theta = \begin{cases} 0, \ l \neq l' \\ \dfrac{2}{2l+1}, \ l = l' \end{cases} . \tag{35}$$

Uma fórmula muito útil na obtenção dos polinômios de Legendre é a chamada **fórmula de Rodrigues**, dada por

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l. \tag{36}$$